ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
63

For Senior & Graduate Courses

重力理論講義

相対性理論と時空物理学の進展

前田 恵一　著



サイエンス社

SGC ライブラリ-63

重力理論講義

相対性理論と時空物理学の進展

前田　恵一　著

サイエンス社

SGCライブラリ

(The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

1	**カオスと量子物理学**	
	中村勝弘著	本体 1857 円
5	**有限体と符号理論**	
	内田興二著	本体 1667 円
8	**差分方程式講義**	
	広田良吾著	本体 1857 円
9	**生命をつくる**	
	中野馨著	本体 1524 円
11	**エコノミックゲームセオリー**	
	船木由喜彦著	本体 1429 円
16	**有限要素法による構造解析事例集**	
	白鳥正樹・三好俊郎 共編著	本体 1429 円
18	**独立成分分析**	
	甘利俊一・村田昇 共編著	本体 1667 円
21	**数学の未解決問題**	
	上野・高橋・中島 共編	本体 1886 円
23	**微分幾何講義**	
	二木昭人著	本体 1857 円
26	**脳型コンピュータの実現に向けて**	
	甘利俊一編著	本体 1857 円
27	**ガロア理論**	
	中野伸著	本体 1790 円
28	**量子可積分系入門**	
	白石潤一著	本体 1876 円
29	**伝えるための理工系英語**	
	宮野健次郎著	本体 1429 円
31	**分子コンピュータの現状と展望**	
	萩谷昌己編著	本体 1524 円
32	**量子情報理論入門**	
	林正人著	本体 1886 円
33	**工学のための非線形解析入門**	
	藪野浩司著	本体 1857 円
34	**経済における確率的モデルへの招待**	
	青木正直著／青山・藤原 監訳	本体 1886 円
35	**賭けの数理と金融工学**	
	竹内啓著	本体 1429 円
36	**応用のための確率論・確率過程**	
	松本裕行著	本体 1876 円
37	**情報理論の基礎**	
	村田昇著	本体 1619 円
38	**複素ニューラルネットワーク**	
	廣瀬明著	本体 1695 円
39	**マクスウェル方程式**	
	北野正雄著	本体 1876 円
40	**制御理論講義**	
	木村英紀著	本体 1886 円
41	**バイオインフォマティクスの基礎**	
	冨田勝監修 斎藤輪太郎著	本体 1857 円
42	**トポロジー入門**	
	田中利史・村上斉 共著	本体 1886 円
43	**アルゴリズムと計算量**	
	谷聖一著	本体 1857 円
44	**ゲーム理論のフロンティア**	
	池上高志・松田裕之 共編著	本体 1829 円
45	**ゲージ場の量子論入門**	
	近藤慶一著	本体 1886 円
46	**現代物理のための解析力学**	
	早田次郎著	本体 1857 円
47	**現代物理数学への招待**	
	鈴木淳史著	本体 1876 円
48	**例題形式で学ぶ現代素粒子物理学**	
	川村嘉春著	本体 1886 円
49	**ソリトンと物理学**	
	戸田盛和著	本体 1876 円
50	**確率的情報処理と統計力学**	
	田中和之編著	本体 1857 円
51	**超対称性理論**	
	太田信義・坂井典佑 共著	本体 1819 円
52	**理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何**	
	谷村省吾著	本体 1886 円
53	**ゲノム進化を考える**	
	斎藤成也著	本体 1429 円
54	**非平衡統計力学**	
	早川尚男著	本体 1790 円
55	**超幾何関数入門**	
	木村弘信著	本体 1857 円
56	**相対性理論**	
	三尾典克著	本体 1838 円
57	**3 次元トポロジーの新展開**	
	戸田正人著	本体 1867 円
58	**数理・情報系のための整数論講義**	
	木田雅成著	本体 1876 円
59	**コンピュータ将棋の頭脳**	
	小谷善行著	本体 1429 円
60	**計算神経科学への招待**	
	銅谷賢治著	本体 1429 円
61	**演習くり込み群**	
	柏太郎著	本体 1886 円
62	**熱方程式で学ぶ逆問題**	
	山本昌宏・金成燦 共著	本体 1429 円
63	**重力理論講義**	
	前田恵一著	本体 1886 円

はじめに

「重力」は現代物理学でいま最もホットなトピックスといえるだろう．星の進化の最後に誕生するブラックホールや中性子星，さらには銀河中心に存在するといわれている巨大ブラックホール．これらは非常に重力の強い世界で，アインシュタインの一般相対性理論が予言する奇妙な曲がった空間を作り出している．また，一般相対性理論が予言する重力場による光の屈折や重力波といった物理学の新しい対象は，現在では宇宙観測の新しい手段を提供し，重力レンズ天文学や重力波天文学として天文学の重要な分野となりつつある．これらの相対論的天体物理学の大きな進展だけでなく，一般相対性理論では時空も物理学的実在となるため，宇宙全体を科学の対象とすることができ，科学的宇宙論の展開を可能にした．アインシュタイン自身はビッグバン膨張宇宙論にたどり着くことはできなかったが，科学的な宇宙をはじめて考えたという意味で彼の貢献は絶大であり，一般相対性理論の重要性は計り知れない．そしてその理論によって予言されたビッグバン宇宙論は大きな成功を収め，宇宙の標準モデルを提供している．自然界のほんの一部である人類が宇宙の真の姿を垣間見ることができたというのは驚くべきことかもしれない．しかしながら，やはり自然はそんなに簡単ではない．ダークエネルギーなどの新しい宇宙の謎をちゃんと次に用意してくれている．

一方，ミクロなスケールでも重力は興味深い研究対象となっている．重力は，同じ「力」でも他の力とは本質的に大きく異なり，重力の量子化はまだ完成していないが，ループ量子重力理論に代表されるように大きく進展しつつある．また重力を他の力と同じ立場におき，素粒子の統一理論から量子重力の問題を考えるアプローチも盛んに研究されている．超紐理論といった究極の理論の探求やそれに基づく宇宙初期のシナリオ構築など，現代物理学の最先端に「重力」が関わる課題や謎が数多く横たわっている．

本書では，この「重力」に関連した話を，一般相対性理論を中心に，その歴史的構成と宇宙物理学への応用，さらには一般相対性理論を超える新しい重力理論の試みについてわかりやすく解説をしよう．

本書は「数理科学」誌で 2006 年 2 月から 2008 年 3 月までの 18 回にわたり連載してきた「重力理論入門 —時空物理学の誕生とその進展—」を一冊にまとめたものである．第 16 回以降の原稿は，同じ時期に執筆した数理科学 2007 年 12 月号「時空の次元：高次元宇宙論の観点から」を含め，まとめなおした．一般相対性理論の研究やその宇宙物理学への応用，さらには新しい重力理論の試みというのは日進月歩で展開し，その研究には常に新たな「勉強」が必要となる．そこで調べたことを何らかの形で本にまとめたいとずっと思ってはいたが，なかなか執筆に至らなかった．それが「数理科学」の連載として取り上げて頂いたおかげで，ようやく日の目を見ることになった．毎回〆切を守らなかったずぼらな著者が何とか最後までたどり着き一冊にまとめることができたのは，ひとえに「数理科学」編集部，特に平勢さんと伊崎さんのおかげです．ここに感謝の意を表します．

平成 20 年 2 月 6 日　横浜の自宅にて

前田 恵一

目　次

第 1 章
序 — 重力理論の変遷

重力は非常に不思議な力である．自然界において，これまで数多くの謎が出されそして解き明かされてきたが，重力は人類史上最も古くから「謎」を提供してきたにも関わらず未だに全貌は解明されていない．重力についての考察は，人類文明誕生とともに始まったことであろう．それほど重力は身近な存在である．しかしその謎の解明は同時に，人類の科学の進歩でもあると言える．重力の正体を明かしていくとともに，人類の世界観は大きく変わってきた．この章では，まず重力に関わる物理学の変遷について概観しよう．

1.1 どうして「重力」か

ニュートン（Isaac Newton）が万有引力の理論を提唱する少し前の頃，ケプラー（Johannes Kepler）たちは重力の正体について考えを巡らしていた．磁力というのは離れた 2 点の間に働く「摩訶不思議な力」と考えられており，遠く離れた 2 つの天体を結びつける力も初めは「磁力」と考えたのも無理はなかった[1)]．当時は，普通の「力」は接触することにより働くと考えられていたからだ．しかし，ニュートンは磁力が次のような性質を持つことから，天体間に働く力ではないと考えた．まず，磁力は引かれる物体の重さに比例しない．また磁石から物体を遠ざけたとき，磁力は距離の逆二乗より速く弱くなる．そしてニュートンは天体間に働く力として全く新しいものを考えた．すなわち，すべての物体同士に引っぱり合う力が働くとする「万有引力」である．万有引力は物体の質量に比例し，距離の逆二乗に比例するとした．この万有引力は天体間に働く力の正体を明らかにしただけではなかった．

古代ギリシャのアリストテレス（Aristoteles）は物体の落下について考察し，重いものほど速く落下すると考えた．しかし，ガリレオ（Galileo Galilei）は「等価原理」により，物体はその重さによらず，全く同じように落下するとした．ニュートンはこの落下を引き起こす原因と 2 つの天体間に働く力が同一のもの

とし，地上での落下現象と天体の運行を一つの法則「万有引力の法則」によって統一的に説明した．初めの統一理論と言えるかもしれない．

このニュートンの万有引力の法則およびニュートン力学は自然科学に新しい世界観をもたらした．ニュートンの運動方程式は，初期に位置と速度を与えるとその後の運動が完全に決定される．これが古典物理学の決定論的世界観で，以後，物理学の主流となる基本的考え方である．

19 世紀には，マックスウェル（James C. Maxwell）の電磁気学と合わせてニュートン力学は古典物理学の大きな柱となり，物理学は完成したかに見えた．しかし，自然はそんなに単純ではなかった．19 世紀末には，ミクロな世界での法則が古典物理学と相容れないことがわかってきた．また，光を伝える媒質としてのエーテルの存在が危うくなってきた．それらを解決すべく現れたのが 20 世紀の二大理論「量子論」と「相対論」である．この相対論は特殊相対性理論のことである．量子論はミクロの世界の法則を大きく変えたし，特殊相対性理論は時間に対するこれまでの常識を覆した．この 2 つの理論の登場には残念ながら重力は関わっていない．しかし，特殊相対性理論は，時間と空間に関する概念を大きく変え，重力の正体を明らかにすることになる一般相対性理論登場のプロローグであった．

アインシュタインは，1905 年に特殊相対性理論を完成し，すべての物体が光速度を越えて運動できないことを明らかにした．当然，どのような情報も光速を超えて伝えることはできなくなる．すると，これまで重力現象を正確に説明し，何世紀もその正しさを誇っていたニュートンの重力理論（万有引力の法則）が大きな矛盾を抱えることになる．ニュートン重力理論では，万有引力は瞬時に伝わるからである．そこで，相対論と矛盾しない重力理論の探索が始まった．アインシュタイン（Albert Einstein）もその一人であったが，「等価原理」の重要性に気づいてからは，ニュートン重力理論の相対論版ではなく，彼独自の考え方で新しい重力理論，一般相対性理論を完成した．

この一般相対性理論は，相対論と矛盾しないように重力理論を拡張したという単純なものではない．アインシュタインは，等価原理を指導原理として思考実験を積み重ね，重力相互作用を時空のゆがみとして捉え，重力を幾何学的に記述するという全く新しい理論を完成したのである．それは，これまでの物理法則の記述法とは大きく異なるものであった．従来は，時間や空間を表す時空という「舞台」の上で物理量がどう変化するかを法則として記述していた．それがニュートン力学の運動方程式であり，電磁気学のマックスウェル方程式である．ところが，アインシュタインは，重力と時空を一体化し，重力場の方程式＝時空の方程式という法則を考え出した．これは，時空という「舞台」そのものが変化する物理量になったということを意味する．その結果，時空は物質場の存在により動的に変化する物理的実在となった．時空は，それまでの現象を記述するための単なる「道具」から，全く質的に新しい「もの」に進化した．

時空は物理学的対象となり，そのことは，時空の物理学という新しい研究分野を拓いたのである．

時空の物理学の典型例は「ビッグバン宇宙論」である．古代の宇宙論と言えば，宗教や哲学などの世界観とも関係し，我々の宇宙がどのような構造をしているかを論じていた．近代科学および観測に基づいた宇宙論では，天体（星や銀河など）といった構成要素（「役者」）が何であるか，どのようにしてできたのか（カント（Immanuel Kant）・ラプラス（Pierre–Simon de Laplace）の星雲説など）といったことに興味の中心があった．しかし，アインシュタインの一般相対性理論は，時空という「舞台」まで含めた宇宙全体を考えることを可能にした．文字通り「すべて」を含んだ宇宙を考えることができるようになったのである．その結果，「舞台」である空間が膨張していることが観測的に明らかとなり，ビッグバン宇宙論という宇宙の標準的考え方が確立した．一般相対性理論は，膨張する宇宙というこれまで人類が想像だにしなかった世界観・宇宙観を導いたのである．

その一般相対性理論は，重力を時空のゆがみと捉えたことで，2 つの新しい研究対象をもたらした．時空のゆがみが波のように伝わる重力波と，時空が極度にゆがみ，光をも閉じこめる不思議な天体ブラックホールである．その後の観測で，それらは実在することがほぼ確実となり，天文学としても非常に重要な物理学的対象となりつつある．重力場による光の屈折を宇宙空間で見事に見せてくれる重力レンズ効果と合わせて，それら一般相対性理論の寵児たちは，現代宇宙物理学では日常茶飯事のことのように論じられている．

このように，宇宙のスケールでは，一般相対性理論はゆるぎもない重要な理論として捉えられている．しかしながら，いったんミクロなスケールに話を移すと，一般相対性理論は完全な重力理論とは言えず，まだまだわかっていないことが多い．特に，重力場の量子化は，量子力学成立からすでに 80 年，量子電磁気学から考えても 60 年近くが経過しているにも関わらず，未だに満足のできる理論は完成していない．

一方では，ペンローズ（Roger Penrose）とホーキング（Stephen W. Hawking）による特異点定理の証明により，一般相対性理論においては特異点の出現は普遍的な現象であることがわかった．特異点は曲率や物質密度が無限に大きくなる時空点で，現実には存在しないと考えられる．そこでは，一般相対性理論は破綻しているはずである．一般相対性理論に変わる新しい理論が必要なことを，一般相対性理論自身が特異点定理をもって示しているのである．多くの実験や観測と矛盾せず，ブラックホールやビッグバン宇宙論など宇宙物理学の重要な分野で大いなる成功を収めている一般相対性理論も完全なものではなかったのである．

現在，その重力の量子化がどうしたら可能かについていろいろな観点から研究されている．一般相対性理論の延長上として，時空を量子化しようという「量

子重力理論」，重力以外の力（電磁気的相互作用・弱い相互作用・強い相互作用）をも一緒に考えて，統一理論的立場から重力の量子化に迫ろうという「超紐（ひも）理論」などがその代表格であろう．重力の量子論は未だに完成されていないが，その成功はさらに新しい時空概念をもたらし，自然科学の新しいページを拓くであろう．

このように重力研究の歴史は，自然科学の進化の歴史の中でも非常に重要な位置を占める．最近では，マクロな宇宙スケールでも「ダークエネルギー」という現代宇宙論最大の謎が現れ，その解決には「重力」の本質的な理解が必要と捉える向きもある．そこで，本書では，これまでの重力研究の歴史的経緯を振り返り，その完成された重力の理論である一般相対性理論にまつわる研究を個々の研究対象ごとにまとめよう．また，一般相対性理論が抱える問題点を整理し，重力の量子化を含めた新しい重力研究の現状についても簡単に触れることにする．

参考文献

1) 山本義隆『磁力と重力の発見 3』（みすず書房，2003）．

第 2 章
ニュートン重力理論と特殊相対性理論

2.1 ニュートン重力理論

2.1.1 万有引力の法則

重力は，我々にもっとも なじみのある力であるにも関わらず，現在でもその本質は完全には理解されていない．多くの物体は，重力により地球表面に拘束されている．地表から持ち上げた物体は，手を離すと地球の重力により落下する．この落下現象は人類が初めに重力の存在を認識したものと言えるであろう．アリストテレスは，物体が落下するのを見て，重い物体ほど速く落下すると考えた．我々の感覚に非常に合った落下現象の理解である．

そのことに異を唱えたのが，16 世紀のガリレオである．空気抵抗が無視できる場合には，物体はその重さによらず，全く同じように落下するとし，ピサの斜塔の実験を行ったのは有名な逸話である．

一方，同じ時期，ケプラーは惑星の運動を理解しようと，それを次の 3 つの法則にまとめた．

第 1 法則：惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く．

第 2 法則：惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に掃く面積は一定である．

第 3 法則：惑星の公転周期 T の 2 乗は楕円軌道の長半径 a の 3 乗に比例する．

彼自身はそれを説明するのに正多面体を使った幾何学的解釈に可能性を探ったが，成功していない．この天体の運動と地上での物体の落下の法則を統一したのが，ニュートンである．微積分学やニュートン力学などの現代科学の基礎を作り上げたことでも有名であるが，天体運動と落下現象を一つの力『万有引力』による現象として捉え，統一的な理解を与えたことは，自然科学における最初の統一理論ということができる．

すべての質量ある物体間には，その質量に比例する力が働く．つまり，2 つ

の質点に働く引力は，物体の質量をそれぞれ m_1, m_2 とし，その間隔を r とすると，

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2.1}$$

で表される距離の逆 2 乗に比例する引力が働く．それを万有引力の法則と言う．ここで比例係数 G はニュートンの重力定数と呼ばれ，$G = 6.673 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3/g \cdot sec^2}$ である．

2.1.2 ガリレオの等価原理

ニュートンは，物体の運動を一般的に記述する「運動方程式」という考え方を導入した．物体は，同じ力が働いてもその質量が大きいほど加速しにくく，そのことを，(質量) × (加速度) = (力) という法則で表現した．これをニュートンの運動方程式と言う．

物体の落下が質量によらないというガリレオの主張は，ニュートンの運動方程式を使って次のように考えることができる．この場合の運動方程式に含まれる質量には 2 種類あることに注意しよう．万有引力の大きさに現れる質量を重力質量 m_{G}，運動方程式の加速度の係数として現れる慣性の大きさを表す質量を慣性質量 m_{I} と言う．そうすると，地球表面の物体の落下運動は

$$m_{\mathrm{I}} a = m_{\mathrm{G}} g \tag{2.2}$$

という運動方程式で表される．ここで a は物体運動の鉛直方向の加速度で，$g = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2 \approx 980\,\mathrm{cm/sec^2}$（$M_{\oplus} \approx 5.977 \times 10^{27}\,\mathrm{g}$, $R_{\oplus} \approx 6.371 \times 10^8\,\mathrm{cm}$ はそれぞれ地球の重力質量，地球半径）は地表での重力加速度である．

一般的な議論からは，m_{I} と m_{G} は全く独立なパラメータであるが，実際にはこの 2 つの質量の比は，物体を構成する物質によらず，一定であることが実験的に確かめられている．そうすると，重力定数を再定義することによりこの比を 1 にとることができる．つまり，$m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{G}}$ となり，2 つの質量を区別する必要はなくなる．この 2 つの質量が等価であることをガリレオの等価原理と言う．この場合，(2.2) 式から質量を消却すると，物体の運動，つまり物体の加速度は地球による重力加速度 g のみで表され，ガリレオの主張が正しいことがわかる．

この慣性質量と重力質量の等価性を使うと，与えられた一様重力場中の物体の運動と一定加速度系からみた物体の運動の間の同等性を示すことができる．つまり，重力が存在しない場合に，慣性系から一定加速度系（加速度 $-g$）への変換を考えると，運動方程式は

$$m_{\mathrm{I}} a = m_{\mathrm{I}} g \tag{2.3}$$

となる．この式は，慣性質量と重力質量が同じであれば (2.2) 式と全く同等で

あるので，一様重力場中の物体の運動と一定加速度系から見た物体の運動は区別できない．これも，ガリレオの等価原理と呼ばれる．この考えは，後に，アインシュタインによって拡張され，一般相対性理論を導くための大きな指導原理（アインシュタインの等価原理）となる．

2.1.3 遠隔作用と近接作用

ここで，ニュートン重力理論を現代的に定式化しておこう．今，物質がある有限領域に分布している場合を考える．ある点 ($\boldsymbol{r}$) にある単位質量の質点に働く重力 $\boldsymbol{F}$ は，重力ポテンシャル ϕ を用い，$\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ で表される．ここで重力ポテンシャル ϕ は，物質の密度分布を ρ とすると，

$$\phi = -G\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2.4}$$

で与えられる．$\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$ を使うと，(2.4) 式は，

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.5}$$

という微分方程式で表される．これは楕円型偏微分方程式で，ディリクレ型やノイマン型（またはその混合型）の境界条件を与えると解は一意的に決定される．

このように，ニュートン重力理論は，(2.5) 式で与えられる楕円型方程式によって定式化される．密度分布 ρ が与えられれば，そのポテンシャルが決まり，任意の点にある単位質量の質点に働く重力が求まる．ここで重要な点は，分布が与えられた瞬間にポテンシャルが求まり，質点に働く重力が決定されるということである．このように遠く離れた物体に直接かつ瞬間的に力の作用を及ぼすことを遠隔作用（action at distance）と言う．これに対し，マックスウェルの電磁気学では，電磁場という力を媒介する場を導入する．力の作用は，電磁場を介しすぐ近くの領域に及ぶ．そのため，離れたところの物体には，電磁場が伝わる時間だけ遅れてその作用が働くことになる．このような力を近接作用と言う．

このように，古典物理学における 2 つの基本的な力である重力と電磁気力の理論は，お互いに相容れない概念を基礎に構築されているにも関わらず，どちらも実験事実や観測結果をうまく説明していたのである．この矛盾した概念の存在は，次に，新しい重力理論の登場の重要な要因となる．つまり，重力は，近接作用としてより厳密な理論（一般相対性理論）に書き換えられることになる．現代物理学では，基本的な相互作用はすべて『場』によって記述される場の理論として表されるという考え方が定着している．

ガリレオの等価原理の実験的検証

慣性質量と重力質量の等価性を主張したガリレオの等価原理は，実験的に高い精度で確かめられている．有名なのはガリレオがピサの斜塔で行った実験が一番古いが，ニュートンも木と金をおもりにした振り子の周期が高い精度で一致することを示し，等価原理が正しいことを確かめている（精度 1/1000）．

より精度の高い実験は，エトベス（R.V. Eötvös）により 1889 年に行われた[1]（さらに精密な実験結果は 1922 年に共同研究者たちによってまとめられている[2]．エトベスは 1909 年にこの実験を行い，ケッチンゲン大学から信託基金を得ているが，1919 年に没）．実験の基本的なポイントは，重力（重力質量に比例）と地球の回転により生じる遠心力（慣性質量に比例）の間に物質による違いがあるかを確かめるのである．重力加速度は $980\,\mathrm{cm/sec^2}$ であるが，地球の回転は緯度 $45°$ で $1.7\,\mathrm{cm/sec^2}$ の遠心力による加速度を生じる．2 種類の物体 A, B の重力質量を $m_{\mathrm{G}}(\mathrm{A}), m_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})$，慣性質量を $m_{\mathrm{I}}(\mathrm{A}), m_{\mathrm{I}}(\mathrm{B})$ とすると，それらの比は

$$k_{\mathrm{A}} = \frac{m_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})}{m_{\mathrm{I}}(\mathrm{A})}, \quad k_{\mathrm{B}} = \frac{m_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})}{m_{\mathrm{I}}(\mathrm{B})}$$

となるが，$k_{\mathrm{A}} = k_{\mathrm{B}}$ を示せば等価原理が成り立つと言える（比例係数 k を重力定数の定義にくり込むと $m_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{I}}$ とできる）．

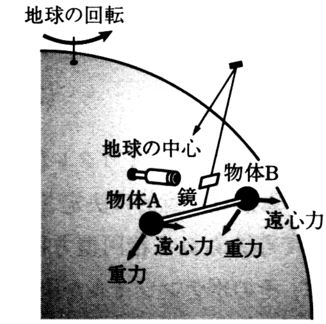


図 2.1　等価原理を検証するエトベスの実験装置の原理[3]．

具体的には物体 A, B を図 2.1 のような実験装置（捩れ秤）に取り付ける．もし 2 つの物体で重力質量と慣性質量の比が異なればその合力は同じ方向を向かないので，つり下げられたひもは捩れる．2 つの物体を入れ替えると捻れ方は変化するので，ひもに付けられた鏡からの反射光を観測することにより重力質量と慣性質量の比が物体によって異なるかどうかを調べることができる．エトベスたちが使ったのは，図 2.2 (a) のような逆 L 字型の重力を測定する装置を応用したもので，左右非対称なためよけいな補正が必要であった．そこで，実際にはそれを 2 つ組み合わせたような装置（図 2.2 (b)）をほとんどの実験で用いている．この実験で，エトベスたちは約 2×10^{-9} の精度で等価原理が成り立つことを示した[2]．

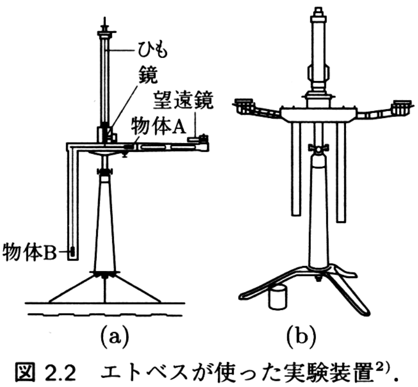


図 2.2　エトベスが使った実験装置[2]．

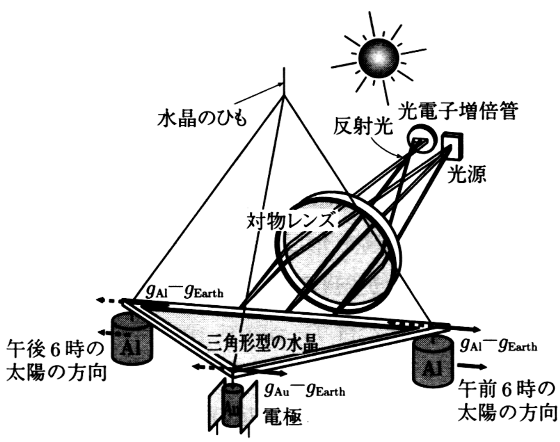


図 2.3　ディッケたちの実験装置[4,6]．

さらに精密な実験は，ロール（P.G. Roll）・クロコフ（R. Krotkov）・ディッケ（R.H. Dicke）[4]やブラジンスキー（V.B. Braginsky）・パノフ（V.I. Panov）[5]によって行われている．ディッケたちは 1964 年に金とアルミニウムを使って実験を行い，等価原理が 1×10^{-11} 以下の精度で成立することを示した．

彼らは地球の回転による遠心力ではなく，太陽の引力による一日の加速度変動（$0.59\,\mathrm{cm/sec^2}$）を利用し，精度を上げた．また彼らは三角形の水晶でつくった枠を水晶の糸でつるす装置を採用した．このような形は重力場の非均一性の影響を除くのに適している．また，この実験を解析することで，陽子と中性子の質量に対する等価原理の精度も評価できる（1×10^{-10}）．

ブラジンスキーたちは 1971 年に白金と金を使った同様の実験でその精度を 1×10^{-12} 以下にした．

これらの実験で示された等価原理（慣性質量と重力質量の等価性）は「弱い等価原理」と呼ばれている．等価原理に関しての議論は「アインシュタインの等価原理」のところで再び触れる．

2.2 古典物理学の矛盾

19 世紀には，ニュートンの古典力学とマックスウェルの電磁気学の二大理論は，自然界の物理現象をすべて説明する完成された理論体系と考えられていた．その古典物理学の体系を根本的に変革したのが 20 世紀に相次いで登場した相対性理論と量子論である．それらの理論が完成されたのは 20 世紀の初頭であるが，その芽は 19 世紀末に「光」の物理に現れていた．光が波動であることは，マックスウェルによる光の電磁波説およびヘルツ（H.R. Hertz）による電磁波の存在確認からすでにわかっていた．それにも関わらず，光電効果は光が「粒子」としての性質も持っていることを示していた．この光の「波」と「粒子」の 2 つの側面は，アインシュタインの光量子仮説を経て量子力学によって理解されることになる．

しかし，当時はもっと深刻な問題があった．マックスウェル理論の整合性に関わる問題である．ニュートン力学に従うと，すべての慣性系は完全に対等である．ニュートン自身は絶対静止系の存在を信じていたようであるが，当時の科学者たちはすでに慣性系はすべて対等であると考えていた．静止しているか一定速度で運動しているかは考えている慣性系に依存し，それらを区別することは意味がないはずである．その結果，慣性系の取り方に依存する速度の値は絶対的な意味を持たない．

一方，マックスウェル理論には光速度

$$c = 2.99792458 \times 10^{10}\mathrm{cm/sec} \tag{2.6}$$

が理論に現れる．ニュートン力学に従うと，ある慣性系からみた物体の速度は，別の慣性系においては異なる．するとこの特別な速度を与える慣性系というのは一体どのような系なのであろうか？ マックスウェル理論が成立する絶対系が存在するのであろうか？ そう考えたくなるが，そのような考え方をする科学者は当時すでにいなかった．

光は電磁波で，波である．そして波は何らかの媒質中を振動しながら伝わると信じられていた．例えば，音の媒質は空気で，その密度の変化が振動として空気中を伝播してくるのが音である．電磁波も同じように電場や磁場が未知の媒質（エーテル）中を振動しながら伝わってくると考えられていた．音速は空気の密度や温度によって決まるが，それは媒質（空気）に対する相対的な速度である．実際，空気の流れがあるところでは音の速さはその分変化する．電磁波は光速度で伝播するが，それも同じように，エーテルに対する相対速度だと考えられていた．そう考えることで，ニュートン力学とマックスウェル理論は絶対系を導入することなく無矛盾の体系となる．

そこでエーテルという未知の媒質の探索が始まった．エーテルに対する光の速度が決まっているとすると，エーテルに対し運動する系で光速度を測定す

ればエーテルの存在が確認できる筈である．地球は太陽の周りをおよそ秒速 30 km/sec で公転しており，光速 c との比は $\beta = v/c \sim 10^{-4}$ である．地球がエーテルに対して公転速度で運動しているとすると，地上の 2 つの地点を光が往復するのに要する時間は，地球が動いていない場合に比べ，$\beta^2 \sim 10^{-8}$ 程度ずれてくる．当時の光速度測定の誤差は 10^{-4} 程度であったので，これは測定不能と考えられていた．ところがドイツ生まれのアメリカの物理学者マイケルソン（A.A. Michelson）は「マイケルソン干渉計」と呼ばれる新しい測定方法を考案した．

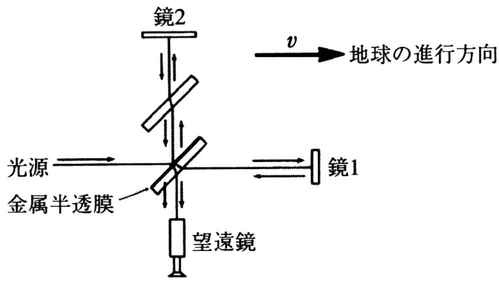


図 2.4　マイケルソン干渉計．

マイケルソンが考えた方法は，図 2.4 のような L 字型の干渉計を用いる方法で，光源からの光を 2 つの光路（腕の長さを L とする）に分け，鏡で反射させた後，再び重ね合わせ干渉させる．この場合，地球の進行方向には光速は $c \pm v$ となるが，それと垂直な方向には $\sqrt{c^2 - v^2}$ であるから，往復に要する時間の差は $L\beta^2/c$ になる．この非常に小さな変化を光の干渉によって測定しようというのであるが，このままでは鏡までの腕の長さの測定誤差などもっと大きな不確定要因があるので，実際には，この装置を 90° 回転した場合に生じる干渉縞の変化を観測する．干渉縞の縞の間隔（フリンジ）s は光路差における 1 波長 λ に相当し，干渉縞のずれ Δs は $\Delta s/s = 2L\beta^2/\lambda$ で与えられる．マイケルソンは 1881 年ポツダムで，$L = 1.2\,\mathrm{m}$，$\lambda = 5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ として実験を行った．この場合，$\Delta s = 0.04$ フリンジとなるはずであるが，実際の結果は予想をかなり下回るものであった．このことから，彼は「静止エーテルの仮説は正しくない」と結論している．しかし，実験誤差がかなり大きかったので，1887 年にアメリカの化学者モーリー（E.W. Morley）とクリーブランドでより精度の高い実験を行った．多重反射によって光路長を $L = 11\,\mathrm{m}$ とかせぎ，望遠鏡を使って干渉縞のずれを観測した．この場合，ずれは 0.4 フリンジとなることが期待されたが，結果は 0.01 フリンジ以下となった．その後の実験でも，やはり干渉縞のずれは観測できず，静止エーテル中を地球が運動しているという仮説は間違っているとしか考えられなかった．

波が媒質中を伝播するという考え方は，当時の物理学の常識であったので，エーテルの存在そのものを疑う科学者はほとんどいなかった．しかしエーテルが地球に対して静止しているという考えも地球が太陽の周りを公転運動していることを考えると受け入れがたい．そこで，当時の物理学界の大御所ローレンツ（H.A. Lorentz）は 1895 年，マイケルソン・モーリーの実験を説明するた

めに画期的なアイデアを思いついた．有名な「ローレンツ収縮」と呼ばれる仮説である*1)．それは，物体がその進行方向に $\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に縮むとするもので，彼は，物質を結びつける力が純粋に電磁気的なものと仮定し，なぜ収縮するかという疑問に力学的説明を与えた．この仮説に従うと，マイケルソン・モーリーの実験結果に矛盾することなく，干渉縞のずれは現れない．ローレンツはこれ以前にも，エーテル中の地球の運動測定で速度の 1 次補正効果が検出されないことを示すために，1892 年の理論では「局所時間」という概念を導入している．ただ，この時間はあくまで数学的な手段として導入されたもので，物理的に意味のある運動する系の時間と関係付けるまでには至っていない．ローレンツはさらに，今日ローレンツ変換と呼ばれる非ガリレイ的座標変換を導入して新しい理論を構築した．この理論とローレンツ収縮や荷電粒子の質量変化に関する新しい仮説によって，彼は，地球がエーテル中を一様に運動する場合，その効果は全く測定できないことを示した．ローレンツはこのローレンツ変換もあくまで数学的手法と考え，その物理学的意味には言及しなかった．ポアンカレ（A. Poincaré）とともに特殊相対性理論の枠組みをほとんど完成していたにも関わらず，その新しい理論を時間の本質的な問題として捉えられなかった．それを明らかにしたのは 1905 年のアインシュタインの特殊相対性理論であった[7]．

2.3 特殊相対性理論

本書では「重力」に関する話題を取り上げているので，特殊相対性理論に関しては後に必要となることのみを簡単にまとめることにする．

アインシュタインが「特殊相対性理論」という新しい理論を導くために前提としたのが，2 つの原理である．その一つは，「すべての慣性系において物理法則は同じである」とする「相対性原理」で，非常にもっともらしい．それが証拠に，高速で空を飛ぶジェット機の中で，地上にいるのとほとんど変わらないように食事をし，コーヒーを飲むことができる．この原理は，加速度というものが基準系に依存しないことから，論理的にも整合性がある．ただ，この原理はアインシュタインが初めに導入した訳ではなく，ガリレオの相対性原理と基本的には同じである．厳密に言えば，ガリレオは力学現象においてこの原理を考えたのに対し，アインシュタインはそれをすべての物理現象に拡張している．同じように見えるが，物理学的にはこれは大きな変更で，後の「アインシュタインの等価原理」のアイデアにつながる．

---

*1) これより遡ること 3 年，1892 年にアイルランドの物理学者フィッツジェラルド（G.F. FitzGerald）はローレンツより早く，マイケルソン・モーリーの実験を説明するために「距離が速度の増加とともに収縮する」という仮説を唱えている．本来はフィッツジェラルド・ローレンツ収縮と言うべきであろうが，こう呼ばれることが多い．

もう一つの原理は，「光速度は，どの慣性系で測定しても同じ値である」とする仮説で，「光速度不変の原理」と呼ばれるが，これは我々の常識と相容れず，極めて理解しづらい．走る車からボールを前方に投げるとボールの速度は車の速さの分だけ上乗せされ，より速くなるというのは，我々が日常体験している．

具体的に考えるため，慣性系 S が別の慣性系 S′ に対して x 軸方向に一定速度 V で動いていたとしよう．このとき，ある物体が，慣性系 S で測って速度 v で x 軸方向に運動していたとする．慣性系 S′ にいる人はこの物体が速度 $v' = v + V$ で運動していることを観測するに違いない．これを速度の合成則と呼ぶ．速度は位置の時間変化なのでその関係を時間微分を使って書くと

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + V \tag{2.7}$$

となる．この関係は論理的にも全く正しい．一方，光速に関しては，すべての慣性系で同じ値になるというのであるから，関係式 (2.7) は成り立たない．常識的には「光速度不変の原理」が間違っていると考えられる．しかし，もしそれが正しいとすれば，関係式 (2.7) のどこがおかしいのであろうか？

それが時間の絶対性という常識的な考え方にあることにアインシュタインは気づいた．わざわざ速度の合成則を (2.7) 式のように書いた理由もそれを説明するためである．左辺に現れる物体の速度 dx'/dt を決めるのは，慣性系 S′ の観測者で，座標 x' も時間 t もその人が測定する．一方，右辺の速度 dx/dt は慣性系 S の観測者がその座標 x も時間 t も測定する．空間の座標値 x, x' は当然相対的に動いている 2 つの慣性系では異なる．では，どうして時間 t が同じなのであろうか？ それは，時間が系によらない絶対的なものであるという常識があるからである．アインシュタインはこの固定観念を捨て，時間は各慣性系で個々に定義されるとした．「絶対時間」より「光速度不変の原理」を優先したのである．時間が絶対的でないという常識に反する考え方から多くのパラドックスが議論されることになった[8)]．光の速さは，その後の実験により非常に高い精度で決定されており，その不変性はゆるぎのないものとなっている[9)]．そのため，現在では，(2.6) 式を光速の定義として与え，より決定精度の悪い「長さ」を「時間」×「光速」で決めるようになっている．

「光速度不変の原理」を数式で表現するには，ミンコフスキー (H. Minkowski) による 4 次元時空を用いた定式化がわかりやすい．ミンコフスキーは，特殊相対性理論をより美しく記述するため，時間 1 次元と空間 3 次元を一体とした 4 次元時空（ミンコフスキー空間）を導入した．3 次元ユークリッド空間では 2 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ と $\mathrm{Q}(x + dx, y + dy, z + dz)$ の間の距離 dl は $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ で与えられるが，これは，座標系の原点をずらしても回転しても変わらず，座標系の取り方によらない．同じように，ミンコフスキー空間では 4 次元時空の 2 点 $\mathrm{P}(ct, x, y, z)$ と $\mathrm{Q}(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$ の間の世界間隔を

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2dt^2 + dl^2 \tag{2.8}$$

で与える．ここで c は光の速さであるが，慣性系の取り方によらない普遍定数であることに注意しよう．世界間隔の定義では時間の部分を長さの次元にするために光の速さ c がかかっている．

この世界間隔がすべての慣性系で同じ値をとると仮定する．ここで，すべての慣性系で同じ振舞いをすることをローレンツ不変性があると言う．これは，考えている物理量や方程式が慣性系間の座標変換（ローレンツ変換）に対して不変であるという意味である．世界間隔がローレンツ不変であれば「光速度不変の原理」が導かれる．実際，ある慣性系での光速は，光が点 P から点 Q に伝わったとすると，2 点間の距離 dl を時間間隔 dt で割った $dl/dt = c$ で与えられるが，この式は，世界間隔で言うと $ds^2 = 0$ ということになる．その結果，この関係（$ds^2 = 0$）が光に対してどの慣性系でも成り立つということが「光速度不変の原理」と同じことになる．世界間隔のローレンツ不変性と光速度不変の原理に密接な関係があるのである．

この特殊相対性理論は，いろいろな物理現象を表現するための舞台である「時空」の振舞いを規定しているだけである．考えている現象が光速に近い物体の運動や場の変化を伴う場合にニュートン力学ではなく，特殊相対性理論が必要となる．光速度に近いというだけなら，いろいろな物理学で必要になるはずである．実際，ニュートン力学を相対論的に拡張した相対論的力学というものを考えることができる．ここで少しだけその相対論的力学について述べておこう．

質点 m（質量 m）の運動を考えよう．ニュートンの運動方程式は前に述べたように質量 × 加速度＝力で表されるが，これは最小作用の原理からも導かれる．このとき，作用 S はラグランジアン L の時間積分：

$$S = \int dt\, L\,, \quad L \equiv \frac{1}{2}mv^2 - V \tag{2.9}$$

で与えられるが，この作用の変分を取ることでニュートンの運動方程式が得られる．ここで力は保存力としそのポテンシャルを V とした．

相対論的運動方程式を考えるには，この最小作用の原理を一般化するのが簡単である．作用がローレンツ不変であることを利用すればよい．相対性理論における物理量は，4 次元時空（ミンコフスキー空間）におけるベクトルやテンソルで表される．質点 m の速度は $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$ で定義されるが，これは 4 次元のベクトルではない．4 次元時空の座標 $x^\mu(\mu = 0,1,2,3)$*2) はベクトルであるが，時間 t そのものはスカラー量ではないので，速度を単純に "4 次元化" した dx^μ/dt もベクトル量ではない．4 次元ベクトルをつくるには時間をスカラー量で表した固有時間 τ を用いなければならない．ここで固有時間 τ は，微分形で $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ で定義される．世界間隔 ds^2 および c がローレンツ不変な

*2) $x^0 = ct,\, x^1 = x,\, x^2 = y,\, x^3 = z$ と定義する．

ので，固有時 τ も慣性系の取り方によらないスカラー量になる．

これらのことから自由粒子（外力が働かない場合の粒子）の作用（作用の運動エネルギーの部分に対応）の一般化は

$$S_f = -mc^2 \int d\tau = \int dt\ L_f, \quad L_f \equiv -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{2.10}$$

で与えられることが導かれる．係数の $-mc^2$ は，運動エネルギーの項がニュートン力学の極限で (2.9) に一致するように決められている．これを用い外力を含む場合に拡張すると運動方程式は

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu \tag{2.11}$$

で与えられる．ここで $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ は 4 元速度，F^μ は 4 元力である．u^μ の空間成分は通常の速度 $\boldsymbol{v}$ （ある慣性系で測定する質点 m の速度）で表すと，$d\boldsymbol{x}/d\tau = \boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ となる．

この自由粒子のラグランジアン L_f から運動量 $\boldsymbol{p}$ とハミルトニアン H_f を導くと，

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \tag{2.12}$$

$$H_f = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \tag{2.13}$$

が得られる．このハミルトニアンの値は自由粒子（質量 m）のエネルギー E と考えることができるが，実際，ニュートン極限をとると

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{2.14}$$

となり，ニュートン力学での質点の運動エネルギーが導かれる．この式の第一項は質点が運動していなくても存在するエネルギーで，静止質量エネルギーと呼ばれる．これは，質点が質量を持てば潜在的にエネルギーを持っていることを示し，質量とエネルギーの等価性として有名な関係式（$E = mc^2$）である．

4 元運動量 $p^\mu = mu^\mu$ は，その空間成分が 3 次元運動量 $\boldsymbol{p}$ を表し，時間成分が E/c となる．その結果，運動方程式 (2.11) の時間成分はエネルギー E に対する方程式を与える．つまり相対性理論ではエネルギーは運動量と一緒に考えるべきものになる．いろいろな保存則はある種の対称性に密接に関連するが，エネルギーと運動量の保存則はミンコフスキー空間の時間および空間方向の並進対称性に付随する保存則である．

相対論的力学以外にも相対論的流体力学や相対論的熱力学，相対論的量子力学などがある．電磁気学は相対性理論と矛盾しないので相対論的電磁気学という呼び方はしない．では相対論的重力理論はどうなのであろうか．

特殊相対性理論の構成法

アインシュタインは特殊相対性理論を導くのに2つの原理，「相対性原理」と「光速度不変の原理」を仮定した[7]．このうち「相対性原理」は対象とする物理現象によらない原理であるが，「光速度不変の原理」には光の速さというものが原理に現れ，「光の存在」を前提としている．しかしながら，「光」は電磁波の一種で，いろいろな物理学を考える前から「光の存在」を仮定し，それを原理に取り込むのは「電磁気学」偏重ではないのだろうか？

今日，多くの特殊相対性理論の教科書では，アインシュタインに倣って，上記の2つの原理を仮定して話を進めている．確かに，歴史的には，その仮説から特殊相対性理論が導かれたので間違いではないが，特殊相対性理論が電磁気学を基礎にするものではなく，もっと基礎にある時間や空間の性質を規定する「運動学」であることを考えると，別の導き方があるのではと想像できる．

実際，「光」を初めに導入しなくても特殊相対性理論は構成できる．その一つは，「光速度不変の原理」を「上限速度の存在」に置き換える方法である．「上限速度の存在」というのは「情報伝播速度には上限が存在する」と仮定することである．上限が存在するとすれば，「相対性原理」からその上限速度は普遍定数であることが分かる．そうでなければ，慣性系によって情報を伝える上限速度に違いが出てくることになり，「相対性原理」に反する．その上限速度を c で表すのである．ここまでは「光」は全く現れない．この方法で特殊相対性理論は完全に構成可能で，その「運動学」を基礎にいろいろな物理学が構成できる．それらは相対論的云々学と呼ばれるであろう．電磁気学もその一つである．

このようにして構成された特殊相対性理論から導かれる結論として，質量を持つ粒子は上限速度 c で運動できないことがわかる．c で運動可能なのは質量がゼロの粒子だけである．「光」の場合を考えると，マックスウェル理論の量子化（量子電磁気学）から，光を表す「光子」は質量ゼロの「粒子」であることがわかる．その結果，光は上限速度 c で伝播できるのである．c が光の速さというのではなく，光の速さがたまたま理論の上限速度 c に一致していたということになる．一般相対性理論における重力波も上限速度 c で伝わる．

もう一つ，興味深い構成法がある．光や普遍速度の存在を前提にしないでも，相対性原理と運動学的仮定から時空が1パラメータ族の変換群の下で不変であることが示せる[10, 11]．実際，相対性原理から導かれる速度の性質や慣性系間の速度変換の滑らかさ（微分可能性）から速度の合成則

$$v' = \frac{v+V}{1+KvV} \tag{2.15}$$

が導かれる[11]．ここでパラメータ $K(\geq 0)$ は慣性系の取り方によらない定数である．その値をゼロにするか，正の有限値と取るかという2つの可能性があるが，前者の場合にはガリレオの速度の合成則(2.7)が導かれ，ニュートン力学に一致する．一方，K を有限値とする場合には，$c = 1/\sqrt{K}$ がその理論の普遍速度（どの慣性系でも同じとなる上限速度）を与え，特殊相対性理論の前提の一つが導かれるというわけである．

2.4 ニュートン重力理論 vs. 特殊相対性理論

2.1.3節で，ニュートン重力理論は我々の世界の重力を非常に正確に表現すると言った．実際に，理論と矛盾する実験や観測は全くなかったと言ってよい．唯一，水星の近日点移動に観測値とのほんのわずかのずれがあったが，それも重力以外のことが原因であったかもしれなかったのである．

とすれば，ニュートン重力理論を改めて考え直すことはないはずである．しかしながら，この理論は前に述べたように，ポアッソン方程式(2.5)で記述される．ポアッソン方程式は時間微分を含まない微分方程式であるので，物質の密度分布が与えられれば，重力ポテンシャルは時間に依存しない形で決定され

る．つまり，ある場所にものを置けば，その周りにその重力場が発生し，遠くの物体にもその重力の影響が瞬時に伝わる．ニュートン理論では重力は無限の速さで伝わることになる．

ところが，特殊相対性理論では，光速が最も速い速さで，それを超えて情報を伝えることはできない．つまり，ニュートン重力理論は特殊相対性理論と相容れないのである．特殊相対性理論は，これまでの矛盾を解決すべく登場した画期的な理論である．一方，ニュートン重力理論は，何世紀にもわたり実験により確かめられてきたゆるぎない理論である．その 2 つが矛盾するということはそのどちらかが厳密な意味では正しくないということである．

どう考えればいいのであろうか？ ここでヒントになるのがニュートンの運動方程式である．これは，（時間微分を含んではいるが，）物体速度が光速近くになるときには（相対論的極限では）正しくなくなる．逆に，上で議論した相対論的な運動方程式の（物体速度が光速に比べて十分に小さい）ニュートン極限ではニュートンの運動方程式が得られる．

これと同じように考えると，ニュートン重力理論の相対論版をつくればいいと誰しもが思うことであろう．ポアッソン方程式をローレンツ不変な形にするには最も簡単な方法として次のようなクライン・ゴルドン方程式を考えればよい．

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\Delta\phi=4\pi G\rho. \tag{2.16}$$

ここで ϕ と ρ はそれぞれ重力ポテンシャル，「物質密度」を表す 4 元スカラーとする（物質密度は，後にわかるように，スカラーではなくテンソルの 1 成分であるので，ここでは「」をつけた）．

この式は，ニュートン極限（$c\to\infty$）を取るとポアッソン方程式が得られ，ニュートン重力理論が回復され，一見好ましいように思える．しかしながら，話はそんなに簡単ではない．相対論特有の問題点を含んでいるのである．

前に述べたように，特殊相対性理論では，エネルギーと質量の等価性がある．今，(2.16) 式の右辺の物質密度には，考えている重力源の物体の質量が入る．一方，左辺の重力場 ϕ は実在する「場」と考えているので，当然，それ自身エネルギーを伴う．電磁場が電磁的エネルギーを持っているのと同じである．その重力場のエネルギーの存在は，エネルギーと質量の等価性により重力場が「質量」を伴っているとみることができる．当然，この「質量」は (2.16) 式の右辺の物質密度に含まれるべきである．通常，場のエネルギーは場の変数（ポテンシャル）の 2 次形式で表されるので，「物質密度」にも ϕ の非線形な寄与があるはずである．その結果，相対論的重力理論は，必然的に非線形な微分方程式にならざるを得ない．簡単なクライン・ゴルドン方程式では記述できないのである．そこで，どのような相対論的重力理論が矛盾のない理論になるのかという探索が物理学者の間で始まった．アインシュタインもその一人である．

参考文献

1) R.V. Eötvös, *Math. Naturw. Ber. aus Ungarn* **8** (1889) 65.
2) R.V. Eötvös, D. Pekár, and E. Fekete, *Ann. Physik* (Germany), **68** (1922) 11.
3) J. Stachel "相対性理論の歴史"『20 世紀の物理学』第 4 章（前田恵一訳）（丸善，1999）p296.
4) P.G. Roll, R. Krotkov, and R.H. Dicke, *Ann. Phys.* (U.S.A.) **26** (1964) 442.
5) V.B. Braginsky and V.I. Panov, *Zh. Eksp. & Teor. Fiz.* **61** (1971) 873 (Sov. Phys.—*JETP* **34** (1971) 464).
6) C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973) p15.
7) A. Einstein, *Annalen der Physik*, **17** (1905) 891.
8) 前田恵一『アインシュタインの時間』（ニュートンプレス）.
9) 霜田光一 "光の速さを測る"，『アインシュタインとボーア』第 4 章（裳華房）p.109.
10) W. Ignatowski, *Arch. Math. Phys.* **17** (1910) 1; *ibid.* **18** (1911) 17.
11) マーミン『相対論：新しい発想で学ぶ』第 3 章，町田茂訳（丸善）およびそこに引用されている参考文献.

第 3 章
重力と曲がった時空

3.1 アインシュタインの等価原理と重力

ニュートン重力理論は，特殊相対性理論の「なにものも光速を超えることはできない」という事実と矛盾した．そこで重力理論の相対論化が試みられていたが，アインシュタインは，1907 年 11 月「生涯で最もすばらしいアイデア」を思いつく[1]．「等価原理」である．前に述べたように，等価原理という考え方はすでにあった．ガリレオの等価原理で，慣性質量と重力質量の等価性ということもできる（第 2 章 2.1.2 節）．このとき，ニュートン力学で重力のみ働く場合を考えると，運動方程式から質量が相殺し，すべての物体は同じ加速度を持つ．同じ重力場中の観測者も同じ加速度を持ち，その観測者から見ると，すべての物体は「等速直線運動をする」ことになり，重力場が消失したかのように見える．厄介者の「重力」が消せるのである．その代償としては，物体とともに落下する「自由落下系」という非慣性系（加速系）に乗り移らなければならない．

逆に，重力の存在しない宇宙空間などで，地球上の重力加速度と同じ加速度で動く宇宙船の中では，見かけ上「重力」が発生したかのように，すべての物体は宇宙船の運動方向と逆向きに「落下」していくであろう．加速系に移ることで，重力を作り出せるのである．そこで，ガリレオの等価原理は，「重力場中の物体の運動は，重力場が存在しない場合に重力加速度と同じ加速度で運動する観測者から見た物体の運動と同じである」と言うこともできる．アインシュタインが思いついた生涯で最も素晴らしい考え方は，この等価原理の拡張である．

アインシュタインは，この等価性が成り立つ対象を力学的運動からすべての物理現象に拡張した．より正確には，「一様重力場が存在する系」と「等加速度で運動する系」の間のすべての物理現象の等価性を主張したのである．これを「アインシュタインの等価原理」と呼ぶ．一見，これはガリレオの等価原理の単純な拡張に見えるが，物理学としてはそこに大きな違いがある．「ガリレオの等価原理」における力学的運動の等価性は，ニュートンの運動方程式を仮定

すると「慣性質量と重力質量の等価性」から導くことができるものである．それに対し，「アインシュタインの等価原理」では，対象をすべての物理現象に広げたため，それまでに知られていない全く新しい物理現象についても考えることができるようになる．つまり，この原理を応用すると，重力が存在するときの物理現象を知るのに，等加速度運動する系でその現象がどうなるかを調べればわかるのだ．実際，アインシュタインはこの等価原理から２つの重要な結論を導いた[1,2]．重力場中の時間の遅れ（重力的赤方偏移）と光の屈折である．

3.1.1 重力的赤方偏移

重力の強い領域から弱い領域に光が伝わるとき，光の波長は赤いほうにずれる．これを重力的赤方偏移と呼ぶ．この重力的赤方偏移は，等価原理を用いれば容易に理解できる．ここではアインシュタインにならって次のような思考実験を考える．まず，等加速度運動をしている部屋を思い浮かべよう（加速度を g とする）．その部屋の床から天井に向かって振動数 ν_1 の光を放出し，天井にある測定装置で光を受け取る状況を考えよう（図 3.1 左）．光を放出する瞬間の部屋の速度をゼロとすると，天井で光を受け取るとき，天井は速度 $v = gh/c$ で上昇している*1)．ここで，h は部屋の高さ，c は光の速さである．これは，測定装置（観測者）が光源から遠ざかっている状況に対応するので，光のドップラー効果により受け取る光の波長は赤いほうにずれる．実際，天井で測定される光の振動数は

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \tag{3.1}$$

と小さくなる．このように，等加速度で運動する観測者から見ると，下から上昇

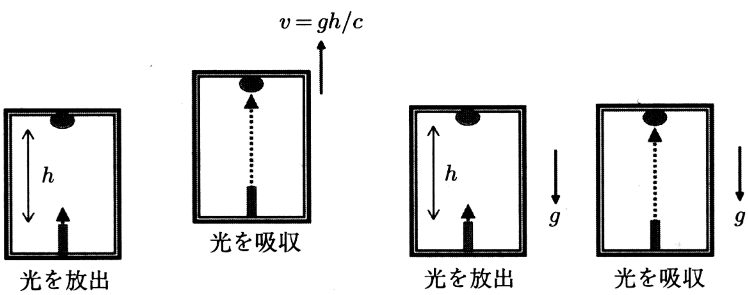


図 3.1 初めに静止していた部屋の床にある光源から放射された光は，天井の測定装置で吸収されるときにドップラー効果で赤方偏移する［左図］．この現象を「アインシュタインの等価原理」を用いて考えると，一様重力場中の部屋の床にある光源から放射された光を天井で受け取るときには赤方偏移することになる（重力的赤方偏移）［右図］．

---

*1) ここでは，速度 v は光速 c に比べて十分小さいとする．

してきた光は赤方偏移する．ここまでは重力とは何の関係もない，通常のドップラー効果である．

ここで「アインシュタインの等価原理」を適用しよう．等加速度で上昇する部屋の代わりに，一様重力場中の静止した部屋を考えよう（図 3.1 右）．等価原理によると，この 2 つの系で起こる物理現象は全く同じということになる．そうすると，重力場中の部屋の床から放出された光を天井で受け取る場合にも上に述べたのと同じ現象が起こり，光は赤方偏移することになる．具体的には，床および天井での重力ポテンシャルをそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とすると (3.1) 式は

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{\phi_2 - \phi_1}{c^2}\right) \qquad (\ \phi_1 < \phi_2 \leq 0\ ) \tag{3.2}$$

と表される．つまり，重力の強いところから弱いところに出てきた光は赤方偏移することが分かる．これが重力場中の赤方偏移（重力的赤方偏移）である．

3.1.2 重力場中の時間の遅れと光の速さ

重力的赤方偏移に関して再考察すると，「重力場中の時間の遅れ」を導くことができる．現代では時間は原子時計を用いて計られる．1 秒は，セシウム原子 (^{133}Cs) の基底状態の 2 つの超微細構造準位間の遷移において放出される光の周期の 9,192,631,770 倍の継続時間で定義される．

(3.2) 式で $\phi_2 = 0$ としよう．重力場のないところでの時間は特殊相対性理論のときと同じ慣性系において定義される時間と考えてよい．しかし，重力場中での時間の進み方に関しては，我々はまだ知らない．今，重力場中の場所 1 にある時計から振動数 ν_1 の光が出て，$\phi_2 = 0$ の場所 2 で光を受け取ったとすると，その振動数は

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{\phi_1}{c^2}\right) < \nu_1 \tag{3.3}$$

となる．ここで，2 つの場所の時間の進み方が同じであればおかしいことに気がつくであろう．例えば，場所 1 で 1 秒間に ν_1 回振動した波が，それを受け取る場所 2 では同じ時間の間に ν_2 回振動することになる．これは明らかに矛盾である．場所 2 の時計は通常の慣性系の時計としたので，場所 1 の時計はそれとは異なるものを考えなければならない．矛盾なく考えるには，場所 1 から場所 2 までの波の数が時刻によらず一定になるように場所 1 の時間を定義すればよい．そのためには，場所 2 の時計が 1 秒進む間に，場所 1 の時計が ν_2/ν_1 秒，つまり

$$\left(1 + \frac{\phi_1}{c^2}\right) \text{秒} \tag{3.4}$$

進めばよいことがわかる．これは 1 秒より小さい ($\phi_1 < 0$) ので，重力場中の時間は遅れることになる．

この時計を使って光の速さを測定すると場所によって速さが異なってくる．

考えている一様重力場と等価な等加速度系を考え，各々の場所で瞬間的に速度が同じになる慣性系で光の速さを測るとすべて同じ c である．等価原理を用いると，一様重力系でもこのことは現象として正しいが，速さは時間の定義によって変わるので，上に定義した時計で計ると，時間の進み方が遅くなる分，光の速さも変化する．場所 2 での光の速さを慣性系における光速 c とすると，場所 1 での光の速さは

$$c_1 = c\left(1 + \frac{\phi_1}{c^2}\right) < c \tag{3.5}$$

となることが分かる*2)．

3.1.3 光の屈折

等価原理を用いると，重力場中で光が屈折することも導くことができる．この光の屈折は，光を粒子と考えると簡単に理解できる．重力場中の粒子は，粒子の質量に依らず，同じように落下する．光も粒子だとすると，重力場中で下のほうに「落ちる」ことがわかる*3)．実際，このような考えから，1801 年にすでに，ゾルドナー（J.G. von Soldner）は，太陽の近傍を通過する光が屈折することを導いていた．その屈折角は

$$\alpha = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \approx 0.87\,\text{秒角} \approx 2.4 \times 10^{-4}\text{度} \tag{3.6}$$

で与えられている．ここで，$M_\odot, R_\odot$ はそれぞれ太陽質量，太陽半径である．

しかし，アインシュタインがこの問題を考えたときは，光は粒子ではなく波であることがわかっていた．マックスウェルの電磁気学から導かれる電磁波の一種である．そこでアインシュタインが用いたのが「ホイヘンスの原理」である．重力場が存在する場合，前節で述べたように，光の速さは場所によって変化する．ホイヘンスの原理を考えるときにこのことを考慮すると，光の屈折が導ける．実際，ある波面から出る 2 次球面波（素源波）の速さが場所により異なり，その結果，光の進行方向が重力の強いほうに曲げられる（図 3.2）．これがアインシュタインの考えた重力によ

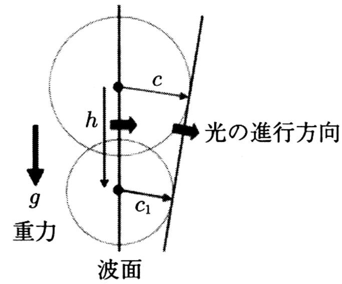


図 3.2　ホイヘンスの原理を使った光の屈折の説明．重力場中では光速が変化するため，図のように光の波面が傾き，進行方向が変化する．

*2)　後に詳しく説明するが，一般相対性理論では，座標の取り方は自由である．時間も座標の一つで，速度は，座標系の取り方により異なるため，絶対的な意味はなくなる．特殊相対性理論で現れる光速 c は，今の場合，局所慣性系における光の速さで，絶対的な意味を持っている．また，(3.5) 式の光の速さはここで設定した特別な時計を用いて測った速さである．

*3)　ニュートンによる光の粒子説では，光は非常に軽い粒子の集合と考えられていた．

る光の屈折である．この考えを使って，太陽近くを通る光の屈折角を求めるとゾルドナーが求めたものと一致した．

3.1.4 等価原理の実験的検証

ここで紹介した新しい物理現象については，等価原理を思いついた1907年の論文で触れられている[1)]が，1911年の論文で，ここで述べたような考察に基づき，重力的赤方偏移や光の屈折などについてより詳しく議論している[2)]．さらにアインシュタインはそれらの発見を検証するための実験や観測についても言及している．重力的赤方偏移に関しては，星表面から放出される光のスペクトル線のずれを観測で確かめることを提唱した．太陽表面ではその相対的なずれは $-\phi_1/c^2 \approx 2.12 \times 10^{-6}$ である．しかし，温度などによるスペクトル線の幅のほうが大きく，このずれを確かめることは困難である．そこで，星表面の重力が強い天体として白色矮星が候補としてあげられた．実際にその半径は太陽の 1/10 ∼ 1/100 倍ぐらいであるので，ずれも 10 ∼ 100 倍になる．しかしながらその場合でも観測の困難さから十分に精度の良い結論は得られず，その解釈を巡って50年以上も天文学者の間で論争が続いた．この重力的赤方偏移が確かなものとなるには，かなり後の1960年に行われたパウンド（R.V. Pound）とレブカ（G.A. Rebka)，およびパウンドとスナイダー（J.L. Snider）による地上実験を待たなければならなかった[3,4)]（コラム参照)．

一方，光の屈折については，太陽のすぐ横に見える星の位置のずれを測定し，確かめる方法が考えられた．その観測のためには日食で太陽を隠す必要がある．そして実際，1912, 1914年の日食時に観測が試みられた．しかしこのときは，観測条件の悪さや戦争などのためはっきりとした結論は得られなかった．このことはアインシュタインにとって幸いした．と言うのは，このときアインシュタインが予言していた上記の値は後にエディントン（A.S. Eddington）たちによって観測される値の半分でしかなかったからである．残りの半分を説明するには，「空間の曲がり」という新しい要素を必要とするのである．

3.2 時空は曲がっていた

等価原理という重力の重要な性質を発見したアインシュタインは，さらに思考実験を重ね，「曲がった空間」というアイデアにたどり着いた．この「曲がった空間」という発想は一般相対性理論完成のための非常に重要な鍵である．そのアイデアに至るきっかけとなるものが2つあった．

3.2.1 一様回転系と空間の曲がり

第一は，一様回転系の考察である[5)]．アインシュタインは，彼の等価原理において一様重力場と等加速度系を考えた．それにより，光の屈折など新しい現

重力的赤方偏移の実験的検証

パウンドとレブカおよびパウンドとスナイダーは，原子のスペクトル線を利用して，地表と 22.5 m の高さの場所における光の振動数のずれを測定した．その実験は，ハーバード大学ジェファーソン物理学研究所にある図のような塔を使い，塔内のヘリウムを入れた管を通って上昇する γ 線を用いて行われた．強い強度を持つ ^{57}Co 放射線源で次の反応が起こる．

$$^{57}\mathrm{Co} + \mathrm{e} \rightarrow {}^{57}\mathrm{Fe}\ (\text{励起状態})\ [\mathrm{K}\ \text{捕獲}]$$
$$\rightarrow {}^{57}\mathrm{Fe}\ (\text{基底状態}) + \gamma$$

このとき放出された 14.4 keV の γ 線は，22.5 m 上昇し ^{57}Fe の吸収体に到達する．予想されるスペクトル線のずれは $gh/c^2 = 2.45 \times 10^{-15}$ である．この非常にわずかな値を測定するため，彼らはメスバウアー効果を用いた．また，彼らは実験精度を上げるため，実際には上向き実験と下向き実験の差を測定し，予想値の (0.9990 ± 0.0076) 倍の値を得ている．

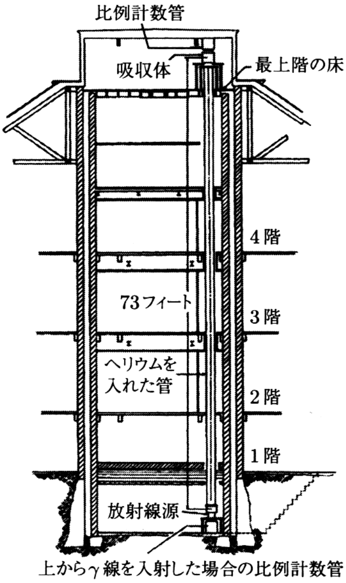


図 3.3 重力的赤方偏移を検証するのに用いられた実験装置[4]．

象を発見した．このように，重力の考察には加速系が重要な役割をするということに気がついた彼は，加速系のもう一つの簡単な場合である一様回転系に思索を広げた．

今，ミンコフスキー空間中で一定の角速度で回転している円盤を考えよう．円周（円盤の縁の長さ）がどうなるかを考えると，回転に沿った方向はローレンツ収縮により，円盤に乗ってその縁の長さを測定した場合より（つまり実際の円周より）短くなるはずである．このことは，円盤の縁の微小な一部分を取り出し，その部分の速度と同じ速さで運動する慣性系と今考えているミンコフスキー空間の間のローレンツ変換を考えることですぐに理解できる．一方，半径方向は運動に垂直であるから収縮は起こらず，ミンコフスキー空間で測定した円盤の半径も，円盤に乗って測った半径も同じ長さになる．ミンコフスキー空間（慣性系）で測定する観測者は，円盤の半径 R と円周 L の間に $L = 2\pi R$ の関係があることに気がつくであろう．

一方，円盤に乗った観測者にとっては，円盤の半径は R のままであるが，円周はミンコフスキー空間で測った長さより $L_0 = L/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ のように長くなる．ここで，v は円盤の縁の回転速度である．つまり，円盤とともに回転する系（非慣性系）では $L_0 > 2\pi R$ となる．この 2 次元空間（曲面）はユークリッド空間ではない．2 次元球面上に円盤を考えると，その半径と円周の関係は $L_0 < 2\pi R$ となり，不等号の向きが逆である．上のような関係を満たす円盤は，実は曲率が負の 2 次元空間になっているのである．このように，非慣性系

を考えると，空間は平坦なユークリッド空間ではなく，曲がった空間になると考えなければならない．アインシュタインは，相対論的回転円盤を考えることで，空間が曲がっていなければならないことに気づいたのである．

3.2.2 重力場中の粒子の運動方程式

もう一つ曲がった空間を考えるきっかけとなったことは，1912 年 3 月に発見した事実である[6]．重力場中の粒子の軌道を表す方程式が，変分原理から導かれることに気がついたのである．ミンコフスキー時空中の相対論的自由粒子の運動方程式は，前に述べたように，作用変分

$$\delta \int c d\tau = 0 \tag{3.7}$$

で与えられる．ここでの c は一定値をとる光の速さである．アインシュタインは，ミンコフスキー時空を一般化し，世界間隔として

$$ds^2 = -c^2(\boldsymbol{r})dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{3.8}$$

を採用し，変分 (3.7) を考えた．ここでの $c(\boldsymbol{r})$ は場所に依存する光の速さである．変分から導かれる運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right) = -\frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}} \cdot \nabla c \tag{3.9}$$

となり，(3.5) 式の光の速さと重力ポテンシャルの関係を使うと，非相対論的極限で，静的な重力場中を運動する粒子の運動方程式が導かれる．ここで，$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ である．この事実は，(3.8) 式に現れる計量の一部（$-c^2$）が，重力ポテンシャルと関係していることを示唆している．

3.2.3 曲がった時空

世界間隔が (3.8) 式で表される時空はどんなものであろうか？ ミンコフスキー空間は平坦なユークリッド空間を時間を含めた時空に拡張したもので，やはり平坦である．(3.8) 式で表される時空はミンコフスキー空間ではない．そこでこれを「曲がった時空」と呼ぶことにしよう．ところが，(3.8) 式を見ると時間だけが特別扱いを受けていることに気がつくであろう．3.2.1 節で考えた回転円盤の考察は，空間部分も重力の存在により影響を受け，平坦ではなくなることを示唆する．そこで，式 (3.8) はより一般的な曲がった時空の世界間隔

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{3.10}$$

に拡張すべきであると考えられる．ここで $g_{\mu\nu}(x)$ は時空の各点 $x^\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$ に依存した計量である．また，(3.10) 式ではアインシュタインの規約を使っている[*4)]．

---

*4) アインシュタインの規約とは，同じ添え字が 2 カ所（上付添え字と下付添え字）出てきた場合にはその添え字について和をとるという約束である．

3.3 時空物理学の誕生

『しかし，そのような曲がった時空は数学的にはどのように表されるのか？』そうアインシュタインが悩んでいたとき，彼の友人で同僚である数学者のグロスマン（M. Grossmann）が，ドイツの数学者ガウス（J.C.F. Gauss）やロシアの数学者ロバチェフスキー（N.I. Lobachevsky）による 2 次元曲面の非ユークリッド幾何学を任意の次元まで一般化したリーマン幾何学の存在を教えてくれた．これは，ドイツの数学者リーマン（G.F.B. Riemann）が作り上げたものである．導入した計量テンソル場（$g_{\mu\nu}$）は 2 点間の世界間隔を (3.10) 式で与え，計量に付随するリーマン曲率テンソル（$R_{\mu\nu\rho\sigma}$）は，その空間がどのように曲がっているかを規定する．これこそまさにアインシュタインが必要としていた数学的道具であった．

この曲がった時空を導入すると，変分 (3.7) の意味が理解できる．この変分は

$$\delta \int ds = 0 \tag{3.11}$$

としても同じである．世界間隔 ds はこの時空の「距離」の役割をし，変分 (3.11) は世界間隔が極値（極小値または極大値）を取るということを意味している．そのようにして得られた「最短」経路を測地線と呼ぶ．地球表面上での大円コースはその一例である．慣性系を表す平坦なミンコフスキー空間では，測地線は 4 次元時空中の直線となり，力が働いていないとき粒子は等速直線運動をするという慣性の法則に対応している．上の変分原理は，重力を含めたとき慣性の法則をどう一般化すればいいかを具体的に与えてくれる．つまり，重力が働く場合の粒子は，変分 (3.11) から得られる経路，つまり重力を記述する曲がった時空中の「まっすぐな」経路（測地線）をたどると考えればよい．実際，3.2.2 節の議論はそのことを支持している．重力場中の粒子の軌道は，重力以外に力が働かない場合には，その曲がった時空の測地線で記述されるというわけだ．

では，物体が作り出す重力ポテンシャル（重力場）はどのようにして表されるのであろうか．それが，彼らの直面した問題であった．曲がった空間を記述するリーマン幾何学では，座標系の取り方は任意である．物理的には各点で任意の観測者を設定してよいことに対応する．物理法則は「相対性原理」を満たす必要があるので，得られる方程式は，任意の座標系間の変換である一般座標変換に対し不変な形をしていなければならない．これを一般共変性と呼ぶ．アインシュタインとグロスマンは，この一般共変性を持つ重力方程式を導こうと試みたがうまくいかなかった．重力が弱い極限で，ニュートン重力理論を再現できなかったのである．しかし，彼らの論文「一般相対性および重力理論の草案」には，最後のゴールに到達するための重要なアイデアが与えられていた[7]．その論文において，計量が時空の構造を表すと同時に重力場も記述していると主張した．計量のこの一人二役のおかげで，これまでのすべての物理学的理論

とは対照的に，時空の構造が“神”から与えられたものではなく，物理学の対象となったのである．彼らが正しい答にたどり着けなかったのは，二人がリーマン幾何学という新しい数学の扱いにおいて，勘違いしていたからだった．1913年のことである．

アインシュタインが最終的な理論に辿り着くまでさらに2, 3年の月日を費やしている．指導原理となった一般共変性に対し疑問を持った時期もあったが，最終的にそれらの問題を解決しアインシュタインは，1915年11月25日，ようやく一般相対性理論を完成することになる[8)]．時空物理学の誕生である．

参考文献

1) A. Einstein, *Jahrb. Rad. Elektr.* **4** (1907) 411.
2) A. Einstein, *Ann. der Phys.* **35** (1911) 898.
3) R.V. Pound and G.A. Rebka, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 337.
4) R.V. Pound and J.L. Snider, *Phys. Rev.* **140** (1965) B788.
5) A. Einstein, *Ann. der Phys.* **38** (1912) 355.
6) A. Einstein, *Ann. der Phys.* **38** (1912) 443.
7) A. Einstein and M. Grossmann, *ZS. f. Math. u. Phys.*, **62** (1913) 225.
8) A. Einstein, *Preuss. Acad. Wiss. Berlin*, Sitzber, (1915) 844.

上記のアインシュタインの論文の一部 2, 7) は和訳が出ている．
- 湯川秀樹監修，内山龍雄訳編『アインシュタイン選集』2《一般相対性理論および統一場理論》（共立出版，1970）．

また，本稿の歴史的な記述内容は主に次の 2 つの文献を参照した．
- A. Pais,『神は老獪にして…』（西島和彦監訳）（産業図書，1987）．
- J. Stachel, “相対性理論の歴史”『20 世紀の物理学』第 4 章（前田恵一訳）（丸善，1999），p296.

第 4 章 リーマン幾何学と一般相対性理論

4.1 リーマン幾何学と物理量・物理法則

アインシュタインが重力を記述するために考えた曲がった時空は，リーマン幾何学を用いて表すことができる．リーマン幾何学は，ガウスやロバチェフスキーが考えていた 2 次元曲面上の幾何学をリーマンが一般の任意次元空間に拡張したもので，多様体 $\mathcal{M}$ と計量 $g_{\mu\nu}$ によって規定される．D 次元多様体は，各点が $\mathbf{R}^D$ と同相な開近傍を持つハウスドルフ空間で定義される．局所的に座標系を設定できる位相空間と考えてよい．物理的空間には通常，「長さ」という概念を導入することができるが，それを与える計量が定義された多様体をリーマン多様体，またはリーマン空間と呼ぶ．多様体 $\mathcal{M}$ 上の近くの 2 点 P, Q を結ぶ「線分」PQ の「長さ」ds を考えよう．今多様体の次元を D とし，$\{x^A : A = 1, 2, \cdots, D\}$ を 2 点 P, Q を含む開近傍の座標系とする．2 点 P, Q の座標を (x^A), $(x^A + dx^A)$ と表すと，「長さ」ds は dx^A に比例し，一般に

$$ds^2 = g_{AB}(x) dx^A dx^B \tag{4.1}$$

で与えられる．この係数 $g_{AB}(x)$ を計量と呼ぶ．例えば，半径 1 の 2 次元球面 (S^2) を考えると，$D = 2$ で，座標系 $\{(\theta, \phi) : 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi\}$ に対し，球面上の長さは $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ で与えられる．つまり，計量 $g_{AB}(x)$ は $g_{\theta\theta} = 1$，$g_{\phi\phi} = \sin^2\theta$，$g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = 0$ となる．

この多様体 $\mathcal{M}$ が時空を記述するわけである．そこで，時空に話を限る場合には座標系の添え字 $A, B, \cdots$ を時空の座標の添え字 $\mu, \nu, \cdots$ とし，時空の次元も 4 としよう．x^0 は時間座標を表し，空間座標は (x^1, x^2, x^3) とする．また，以後は特に断らない限り光速 c を 1 とする．

この時空においていろいろな物理量が定義される．物理量は座標系の取り方に依存してはいけない．それは，観測者によって物理量の定義が変わると客観的な物理法則の記述ができないからである．その結果，物理量は一般座標変換に対して共変的に変化しなければならない．それは，物理量がテンソル（スカ

ラーやベクトルはその特殊な場合）で記述されることを意味する[*1)]．つまり，すべての物理量は，一般座標変換 $x^\mu \to \bar{x}^{\bar{\mu}}(x)$ に対し

$$\bar{T}^{\bar{\mu}\bar{\nu}\cdots\bar{\rho}}{}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\cdots\bar{\gamma}} = \frac{\partial\bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\bar{x}^{\bar{\nu}}}{\partial x^\nu}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{\bar{\rho}}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^{\bar{\alpha}}}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^{\bar{\beta}}}\cdots\frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^{\bar{\gamma}}}T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma} \tag{4.2}$$

というように変換されるテンソル量 $T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma}$ で記述されるとするのである．このテンソルの定義は，「ベクトルは位置座標と同じように変換される」とした初等的なベクトルの定義の自然な拡張である．

テンソルの上付き添え字，下付き添え字をそれぞれ反変成分，共変成分と呼ぶ．世界間隔 ds^2 は一般座標変換に対して不変であるとしているので，計量 $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルであることがわかる．このテンソルの反変成分 $g^{\mu\nu}$ を $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ で定義する．ここで，δ^μ_ν はクロネッカー・デルタである．この反変テンソル $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ を 4×4 行列と見たときの逆行列である．

この定義から，テンソルの反変成分と共変成分の入れ替えは計量 $g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ を用いて行えばよいことが示される．例えば，反変ベクトル V^μ の共変ベクトル表示は $V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$ で与えられる．

物理学の法則は通常，微分方程式で記述される．そこで，曲がった時空での微分というものがどういうものかをきっちりと定義しなければならない．微分というのは 2 つの異なった 2 点間の量の差をその間隔で割り，間隔ゼロの極限をとったものである．しかし今の場合，テンソル量の変換則は各点で定義され，離れた 2 点で定義された 2 つのテンソルは同じ変換則を満たさない．その結果，離れた 2 点のテンソルの差はテンソル量にはならない．そのようにして定義した微分は物理量を記述していないと考えられる．

そのようなまずいことが起こるのは，ある点でのテンソル量をそのまま別の点に持っていくと，テンソル量でなくなることが原因である．そこで，ある点でのテンソル量を別の点でもテンソルとなるような「平行移動」という概念を導入しよう．平坦な空間では，テンソル成分をそのまま移せばその点でもテンソルとなる．しかしながら，曲がった空間では異なる 2 点での基底が「平行」でないため，テンソル成分をそのまま移動してもテンソルにはならない．基底がどのように平行に移されるかを規定すれば，テンソルをどのように平行移動すればいいかが分かる．そしてリーマン空間での自然な微分が定義される．

ベクトル $\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ を考えよう．ここで $\boldsymbol{e}_\mu$ は基底ベクトルで，場所によって変化する．このとき，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分は場所が変わると 2 種類の変化をする．一つはベクトル場そのものの変化で，もう一つが基底の変化に伴うものである．ベクトル場の平行移動は，前者が変化しないものとして定義するのが自然であろう．微小に離れた 2 点 P (x^μ) および Q $(x^\mu + dx^\mu)$ における 2 つの基底は

---

*1） 内部自由度を考えるとスピノルなども現れる．

$$\boldsymbol{e}_\mu(x+dx) = \boldsymbol{e}_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\boldsymbol{e}_\mu(x)dx^\alpha \tag{4.3}$$

という関係にある．ここで $\partial \boldsymbol{e}_\mu(x)/\partial x^\alpha$ を基底ベクトルを用いて

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\boldsymbol{e}_\mu(x) = \boldsymbol{e}_\rho(x)\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}(x) \tag{4.4}$$

と表すと，$A^\mu(x)$ と同じものを点 Q まで平行移動した $A^\mu_\parallel(x+dx)$ は

$$A^\mu_\parallel(x+dx) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x)A^\beta(x)dx^\alpha \tag{4.5}$$

で与えられる．点 Q におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の成分 $A^\mu(x+dx)$ との差は点 Q のベクトルになり，

$$\begin{aligned}A^\mu(x+dx) - A^\mu_\parallel(x+dx) &= A^\mu(x+dx) - A^\mu(x) + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x)A^\beta(x)dx^\alpha \\ &= \left[\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x)A^\beta(x)\right]dx^\alpha\end{aligned} \tag{4.6}$$

と与えられるので，自然な微分

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}A^\beta \tag{4.7}$$

が定義される．これをベクトル $\boldsymbol{A}$ の共変微分と呼び，得られた量もテンソル場となり，物理的意味を持つことが可能になる．ここで $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ は (4.4) で定義され，アフィン接続係数と呼ばれる．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさ（$A_\mu A^\mu$）は平行移動により変化しないとするのが自然であろう．そうすると，この接続係数が一部限定される．つまり，

$$g_{\mu\nu}(x+dx)A^\mu_\parallel(x+dx)A^\nu_\parallel(x+dx) = g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)A^\nu(x) \tag{4.8}$$

とすると，(4.5) 式から

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} = 0 \tag{4.9}$$

が得られる．ここで，アフィン接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ を

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma_{[\mathrm{S}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta} + \Gamma_{[\mathrm{A}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{4.10}$$

と分解しよう．$\Gamma_{[\mathrm{S}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{[\mathrm{A}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta}$ は $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ の添え字の α, β に関してそれぞれ対称化，反対称化したもので，

$$\Gamma_{[\mathrm{S}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\right), \quad \Gamma_{[\mathrm{A}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\right) \tag{4.11}$$

で定義される．そうすると，条件 (4.9) から対称部分が

$$\Gamma_{[\mathrm{S}]}{}^\mu{}_{\alpha\beta} = \left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right) \tag{4.12}$$

のように決定される．この $\left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}$ をクリストッフェル記号と呼ぶ．これは添え字が 3 つ付いているがテンソルではなく，一般座標変換 $\{x^\mu\} \to \{\bar{x}^{\bar{\mu}}(x)\}$ に対し

$$\left\{ {\bar{\mu} \atop \bar{\alpha}\bar{\beta}} \right\} = \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\bar{\beta}}} \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}} \partial \bar{x}^{\bar{\beta}}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\nu}} \tag{4.13}$$

のように変換される．これは座標系をうまく選ぶと $\left\{ {\bar{\mu} \atop \bar{\alpha}\bar{\beta}} \right\} = 0$ とできることを意味する．このことは，以下に示されるように，自由落下系で重力が見かけ上消失することと関係がある．

一方，反対称部分はテンソルとなるが，これまでの議論からは決定されず，リーマン幾何学では通常ゼロと仮定される．この反対称部分はトーションと呼ばれ，統一理論や一般相対性理論の拡張を考えるときに重要視された．しかしながら，本書では特に断らない限り，反対称部分はゼロと仮定し，$\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}$ を $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ と表すことにする．

上で定義された共変微分は基底が場所によることが反映されたもので，必ずしも曲がった時空に特有のものではない．実際，平坦なユークリッド空間でも曲線座標を用いると微分には気を付けなければならない．では，曲がった時空に特徴的な幾何学量は何であろうか．それこそまさに空間の曲がりを表す「曲率」である．では空間が曲がっていることはどう記述できるのであろうか？ 今地球表面（2 次元球面）があり，この上の 2 次元ベクトルを考えよう．このベクトルの「平行移動」は自然に定義できる．

今赤道上のある地点にベクトル $\boldsymbol{a}$ があり（図 4.1），それをまず赤道に沿って平行移動する（ベクトル $\boldsymbol{b}$）．そして，北極点に向かって平行移動するとベクトル $\boldsymbol{c}$ になる．一方，同じベクトルを直接北極点に向かって平行移動するとベクトル $\boldsymbol{d}$ になり，前のベクトル $\boldsymbol{c}$ に一致しない．このずれは何から来ているのであろうか？ 平坦な 2 次元平面では別の 2 つのルートを通っても平行移動した結果は一致する．このことから，上のずれは空間（曲面）の曲がりが原因だと理解できる．

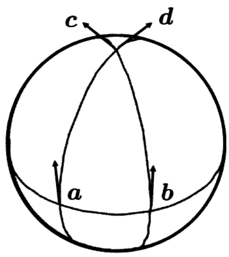


図 4.1 球面上のベクトルの平行移動．ルートが異なると平行移動した結果が異なる．

そこで微小に離れた 2 点 P, Q を結ぶ 2 つのルート A(P → R → Q), B(P → S → Q) を考えよう（図 4.2）．その 2 つのルートに沿ってベクトル $A^{\mu}(\mathrm{P})$ を平行移動して得られた 2 つのベクトル $A_{\mathrm{A}}{}^{\mu}(\mathrm{Q})$ と $A_{\mathrm{B}}{}^{\mu}(\mathrm{Q})$ の差は

$$A_{\mathrm{B}}{}^{\mu}(\mathrm{Q}) - A_{\mathrm{A}}{}^{\mu}(\mathrm{Q}) = R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}(\mathrm{P}) A^{\alpha}(\mathrm{P}) dx_{\mathrm{I}}^{\beta} dx_{\mathrm{II}}^{\gamma} \tag{4.14}$$

と表されるであろう．ここで，この差はベクトル場 $A^{\mu}(\mathrm{P})$ および移動する座標差 $dx_{\mathrm{I}}, dx_{\mathrm{II}}$ に比例すると考えられるので，そのことを陽に表した．その結果，その係数 $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}(\mathrm{P})$ は空間の性質のみによる幾何学量となる．これをリーマン曲率またはリーマン・クリストッフェル曲率と呼ぶ．

前に求めた平行移動の定義から

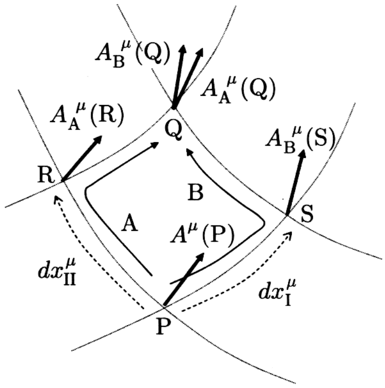


図 4.2 曲がった空間でのベクトルの平行移動と曲率．2 つのベクトル $A_A^{\ \mu}(Q)$ と $A_B^{\ \mu}(Q)$ のずれが曲率に比例する．

$$\begin{aligned}
A_A^{\ \mu}(\mathrm{Q}) &= A_A^{\ \mu}(\mathrm{R}) - \Gamma^{\mu}_{\ \nu\rho}(\mathrm{R})A_A^{\ \nu}(\mathrm{R})dx_{\mathrm{I}}^{\rho}, \\
A_A^{\ \mu}(\mathrm{R}) &= A^{\mu}(\mathrm{P}) - \Gamma^{\mu}_{\ \nu\rho}(\mathrm{P})A^{\nu}(\mathrm{P})dx_{\mathrm{II}}^{\rho}, \\
A_B^{\ \mu}(\mathrm{Q}) &= A_B^{\ \mu}(\mathrm{S}) - \Gamma^{\mu}_{\ \nu\rho}(\mathrm{S})A_B^{\ \nu}(\mathrm{S})dx_{\mathrm{II}}^{\rho}, \\
A_B^{\ \mu}(\mathrm{S}) &= A^{\mu}(\mathrm{P}) - \Gamma^{\mu}_{\ \nu\rho}(\mathrm{P})A^{\nu}(\mathrm{P})dx_{\mathrm{I}}^{\rho}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

であるので，(4.14) 式から，リーマン曲率は，クリストッフェル記号を用いて

$$R^{\mu}_{\ \alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\mu}_{\ \nu\beta}\Gamma^{\nu}_{\ \alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\ \nu\gamma}\Gamma^{\nu}_{\ \alpha\beta} \tag{4.16}$$

のように記述されることがわかる．

このリーマン曲率テンソルは 4 階のテンソルで，4 次元（$\mu = 0, 1, 2, 3$）であることを考慮すると，単純には $4^4 = 256$ 個の成分を持つ．しかし，上の定義からリーマンテンソルは次のような対称性を持つことがわかる．

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \tag{4.17}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}, \tag{4.18}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0. \tag{4.19}$$

この対称性からリーマンテンソルの独立な成分の数は 20 個になることがわかる．またリーマンテンソルは次のような恒等式を満たす．

$$\nabla_{\alpha} R^{\mu}_{\ \nu\beta\gamma} + \nabla_{\beta} R^{\mu}_{\ \nu\gamma\alpha} + \nabla_{\gamma} R^{\mu}_{\ \nu\alpha\beta} = 0. \tag{4.20}$$

これをビアンキ恒等式と呼ぶ．また，この式の縮約をとり，リーマンテンソルの対称性を用いると

$$\nabla^{\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_{\mu} R = 0 \tag{4.21}$$

が得られる．ここで，$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\ \mu\rho\nu}$, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ はそれぞれリッチテンソル，スカラー曲率である．これを縮約されたビアンキ恒等式と呼ぶ．

時空はここで定義されたリーマン空間で記述され，物理量はベクトル場やテンソル場で表される．そして物理法則は，一般相対性原理から，その時空におけるテンソル方程式で与えられることになる．

4.2 測地線方程式と運動方程式

ユークリッド空間の中には好き勝手な曲線を描けるが，直線はその中でも特別な意味を持つ．空間の中の任意の 2 点を結ぶ曲線で最短なものが直線である．曲がった空間でも同じように 2 点を結ぶ曲線で最短になるものが考えられ，測地線と呼ばれる．地球表面上の大円コースはその例である．

今 D 次元リーマン空間 $(\mathcal{M}, g_{AB})$ 上の 2 点 P, Q を結ぶ曲線 C: $x^A = x^A(\lambda)$ の長さ L は

$$L = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} ds = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} d\lambda \sqrt{g_{AB}\frac{dx^A}{d\lambda}\frac{dx^B}{d\lambda}} \tag{4.22}$$

で定義される．ここで λ はアフィン係数と呼ばれ，曲線 C を規定するパラメータである．長さ L の変分をとることにより 2 点 P, Q を結ぶ最短コースを求めると，曲線 C の満たすべき方程式

$$\frac{d^2x^A}{d\lambda^2} + \Gamma^A_{BC}\frac{dx^B}{d\lambda}\frac{dx^C}{d\lambda} = 0 \tag{4.23}$$

が得られる．この式を測地線方程式と呼ぶ．ここで Γ^A_{BC} は (4.12) 式で定義されるクリストッフェル記号である．

4 次元時空 $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ には時間座標が含まれるので，粒子の軌道のような時間的な世界曲線（$ds^2 < 0$）の場合には「長さ」ds は実数にならない．そこで，そのような場合には固有時間 $d\tau^2 = -ds^2$ を使って $L = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} d\tau$ の極値をとることにすれば同じ測地線方程式が得られる．

ここで，重力しか働かない粒子の運動を考えよう．等価原理によると，局所慣性系に移れば重力が消滅することになる．つまり，局所慣性系では力が働かない自由粒子と考えられるので，局所慣性系の座標を $\{X^a\}$ とすると，その運動は，加速度ゼロ，つまり

$$\frac{d^2X^a}{d\tau^2} = 0 \tag{4.24}$$

で表される．これを一般座標系 $\{x^\mu\}$ から見た運動方程式に書き換えよう．座標変換を $dX^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ とすると，(4.24) 式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \tag{4.25}$$

と表される．$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = e^\mu{}_a \partial e^a{}_\nu / \partial x^\rho$ は (4.4) 式で定義されたアフィン接続係数である．この運動方程式は，アフィン係数 λ として固有時間 τ をとった場合の

測地線方程式に一致する．一般相対性理論における重力場中の粒子は，重力という力が働くことによって軌道が変わるとするニュートン重力的考え方ではなく，曲がった時空の中を「まっすぐ」測地線に沿って進むと考えるのである．

また，(4.25) 式に粒子の質量 m をかけ，書き直すと

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = mg^\mu, \quad g^\mu \equiv -\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} \tag{4.26}$$

となる．これは，重力加速度 g^μ が働くときの運動方程式と見ることもできる．このように表すと，等価原理，つまり慣性質量（左辺の m）と重力質量（右辺の m）の等価性がこの理論に内在されていることがわかる．

4.3 アインシュタイン方程式とその2つの役割：一般相対性理論の誕生

物体の運動は，特殊相対性理論の運動方程式を一般共変的に書き換えれば得られることがわかった．他の物理法則も特殊相対性理論を基礎にした物理法則の記述を一般共変的なテンソル方程式に書き換えればいいであろう．ミンコフスキー空間を舞台にするか，リーマン空間を舞台にするかの差だけと言ってよい．しかしながら，$g_{\mu\nu}$ が時空の計量と重力場の一人二役をこなすため，重力は次の 2 つの点で他の場と物理的に大きく異なる．一つは計量が重力場で記述されることから時空そのものが物理学の対象となり，時空は時間的に変化するダイナミカルな存在となる点である．前章で述べたように，相対論的重力理論の完成が，「時空の物理学」という新しい物理学の誕生をもたらすことになる．第 2 は，重力場以外の物理量の基礎方程式は，特殊相対性理論における法則がわかっており，それを一般化すればよい．しかしながら，重力に関しては特殊相対性理論における法則は構成できていないので，その基礎方程式がどうなるか全く予想できないという点である．

アインシュタイン自身は，曲がった時空のアイデアに思い至った後も思考錯誤を繰り返し，最終的に現在のアインシュタイン方程式にたどり着いた[1)]．しかし，ここではいくつかの原理を前提とし，アインシュタイン方程式を導こう．

設定する原理は次の 3 つである．

[1] 一般共変性がある（一般相対性原理）．

[2] エネルギー・運動量保存則が成立する．

[3] 非相対論的極限でニュートン重力理論を再現する．

条件 [1] は基礎方程式がテンソル形式で書けること，つまり観測者によらず同じ法則が成り立つという「相対性原理」を考えていることになる．重力ポテンシャルを ϕ とするとニュートン重力理論は

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{4.27}$$

というポアッソン方程式で記述される．前章で話をしたように，静的で弱い重力場の場合（$\phi/c^2 \ll 1$）には重力ポテンシャルと計量の00成分に $g_{00} = -c^2(\boldsymbol{r}) = -(1+\phi/c^2)^2 \approx -(1+2\phi/c^2)$ のような関係があることがわかっている．すると (4.27) 式の左辺は計量の2階微分であることが予想されるが，そのような量でテンソルになるものはと言えば曲率である．一方，右辺の質量密度は相対論的にはスカラー量でないことはすでに触れた．エネルギーと質量の等価性から ρc^2 はエネルギー密度と考えられるが，それはエネルギー・運動量密度を記述する2階のテンソル量 $T_{\mu\nu}$ の00成分である．つまり，(4.27) 式は

$$-\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \tag{4.28}$$

と書き換えられるが，このことから求めるべき重力場の方程式は2階のテンソル方程式であると考えられる．曲率のもっとも一般的なものはリーマン曲率 $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ であるが，それは4階のテンソルであるので，そのままは使えない．縮約したリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ やスカラー曲率 R が左辺に，また右辺にはエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ がそのまま現れると予想される．つまり，基礎方程式は

$$R_{\mu\nu} - c_1 g_{\mu\nu} R = c_2 \times \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{4.29}$$

と表されるであろう．ここで c_1, c_2 はこれから決める無次元の定数である．

次に条件 [2] を使おう．エネルギー・運動量保存則は $T_{\mu\nu}$ を用いて

$$\nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = 0 \tag{4.30}$$

と表される．これがいつでも成立しているという要請から c_1 が決定される．実際，曲率の微分に関しては縮約したビアンキ恒等式 (4.21) が成り立っている．そこで，$c_1 = 1/2$ ととれば (4.29) 式を共変微分することでエネルギー・運動量保存則が保証されることになる．

残るは c_2 だけであるが，これは条件 [3] から決定される．今重力場を静的とし，線形近似できる程度に十分弱く，かつ非相対論的極限（$c \to \infty$）を考えると $R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \approx -\Delta g_{00}$ と表される．ここで (4.29) 式が (4.28) 式と一致するという要請から $c_2 = 1$ と決定される．

以上をまとめると，上の3つの原理を満たす重力場の方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{4.31}$$

となることがわかる．これがアインシュタイン方程式である．この方程式の左辺は，まとめて $G_{\mu\nu} (\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)$ と書き表し，アインシュタインテンソルとも呼ぶ．このアインシュタイン方程式を含む一般共変的な重力理論を一般相対性理論と言う．

(4.31) 式は，計量 $g_{\mu\nu}$ に関する2階微分方程式で，重力場 $g_{\mu\nu}$ を決定すると同時に，時空がどのように決まるかを物理学的に考える手段を与える．重力理

論の相対論化（相対論的重力理論）に成功したというだけでなく，時空の概念を根本的に変えたという意味で，絶対時間を否定した特殊相対性理論の一般化，「一般相対性理論」と呼ぶにふさわしい理論である．時空物理学の誕生である．

アインシュタインがこの仕事を完成し，プロシア・アカデミーに論文を提出したのは 1915 年 11 月 25 日のことである[1]．その 5 日前にヒルベルト (D. Hilbert) は一つの制限付きで同一の方程式を含んだ論文を提出していた[2]．ヒルベルトの論文では電磁気学のミー理論を重力にも適用するなど，物理学的にはいくつかの問題点を含んでいたが，アインシュタインの得た重力方程式を変分原理から導いたという意味では重要である．その作用

$$S_g = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R \tag{4.32}$$

は現在，アインシュタイン・ヒルベルト重力作用と呼ばれている．アインシュタインとヒルベルトの確執など，この時期の歴史的に興味深い事情は文献 3) に詳しい．

参考文献

1) A. Einstein, *Preuss. Acad. Wiss. Berlin*, Sitzber.［プロシア科学学士院会報］(1915) 844.
2) D. Hilbert, *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys.* **Kl.** (1915) 395.
3) A. Pais,『神は老獪にして…』（西島和彦監訳）（産業図書，1987）.

第 5 章
アインシュタインは正しかった

5.1 実験的検証の必要性

アインシュタインは見事な洞察力で，ほんのわずかの手がかりから重力場の方程式（アインシュタイン方程式）を導いた．特殊相対性理論と矛盾するとはいえ，ニュートン重力理論は実験や観測を非常に正確に記述していた．唯一説明できなかったものは水星の近日点移動であったが，それも重力が原因かどうかはっきりしていなかった．

通常の物理学は実験を繰り返すうちに理論にほころびが見え，それを改良する形で新しい理論が生まれる．量子力学がそのよい例である．しかしアインシュタインの一般相対性理論は完全に理論先行であった．アインシュタインが思考実験を繰り返し，最も簡単で最も美しい相対論的重力理論として創り上げたものである．

物理学としては当然それが本当に正しいかどうか確かめなければならない．ここでは，アインシュタインが考えた道をたどることにする．我々は空間が曲がっていると感じたことはない．それは重力源がそれほど強くなく，空間の曲がりもわからないぐらいに小さいからである．実際，第 4 章で示したように重力ポテンシャルと計量の間には $g_{00} = -(1+2\phi/c^2)$ の関係があるが，この計量の -1 からのずれ (曲がりの効果) は，太陽表面でも $-2\phi/c^2 = 2GM_\odot/R_\odot c^2 \approx 4.2\times10^{-6}$ 程度と非常に小さい．

そこでまず重力の弱い現実的な場合を考え，実際に理論を実験で確かめるためにはどうすればいいかを調べなければならない．これがアインシュタインの初めに考えたことである．そのためには，弱い重力場の近似であれ，アインシュタイン方程式を解く必要がある．アインシュタインは，独自の方法で解を求め，水星の近日点移動を正しく与え，太陽による光の屈折が検証可能であることを示した[1,2]．しかし，ここではまずシュヴァルツシルト（Karl Schwarzschild）が見つけたシュヴァルツシルト解を導くことから始めよう．

5.2 シュヴァルツシルト解

ニュートン重力理論を考えよう．星の周りの重力ポテンシャル ϕ は，星の外では物質が存在しないので，真空中のラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解けばよい．球対称な星の場合には $\phi = -GM/r$ が求めるポテンシャルである．ここで M は星の質量，r は星の中心からの距離である．

一般相対性理論はニュートン理論を相対論的に拡張したものだから，同じような状況を考えることができる．アインシュタインの一般相対性理論の話を聞いたドイツの天文学者シュヴァルツシルトは，そのような時空を記述する解を相対論完成の翌年に見つけた[3]．

時間的に変化しない球対称な重力場を考えよう．そのような時空の計量は

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Psi}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.1}$$

とおける．ここで

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{5.2}$$

で，極座標の角度座標 θ, φ はそれぞれ $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$ である．Φ, Ψ はこれから決定する計量変数で，動径座標 r のみに依存する未知関数である．もちろんこの座標の取り方は一意的ではなく，後でも示されるように，いろいろなものが考えられる．それがまたブラックホールの物理的意味の解釈においても重要となってくる（第 8 章）．

真空中のアインシュタイン方程式はリッチ曲率 $R_{\mu\nu}$ を使って，$R_{\mu\nu} = 0$ と記述される．計量 (5.1) の仮定の下にリッチ曲率を計算すると自明でない成分から Φ と Ψ の方程式が以下のように得られる．

$$R^0{}_0 = e^{-2\Psi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\Psi'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{5.3}$$

$$R^1{}_1 = e^{-2\Psi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\Phi'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{5.4}$$

$$R^\theta{}_\theta = R^\varphi{}_\varphi = e^{-2\Psi}\left(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Psi'}{r} - \Phi'\Psi'\right) = 0. \tag{5.5}$$

ここでプライム $(')$ は r による微分を表す．(5.5) 式は他の 2 つから導くことができるので，(5.3) 式と (5.4) 式を積分すればよい．その 2 式の差から $\Phi' + \Psi' = 0$ が得られるので，$\Phi + \Psi =$ 一定となる．十分遠方ではミンコフスキー時空に近づくので，$r \to \infty$ のとき $\Phi, \Psi \to 0$ である．その結果 $\Phi + \Psi = 0$ となる．一方 (5.3) 式を積分すると，$r \to \infty$ での境界条件を用いて

$$e^{-2\Psi} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{5.6}$$

が得られる．ここで r_g は積分定数である．$\Phi = -\Psi$ であるので，$e^{2\Phi} = 1 - r_g/r$

となる．$r \to \infty$ での極限では重力が十分弱くニュートン理論が再現されるはずである．実際この極限で $2\phi/c^2 \approx -(g_{00}+1) = e^{2\Phi} - 1 = -r_g/r$ となるので，定数は $r_g = 2GM/c^2$ と決定される．ここで M は重力源の星の質量である．r_g は重力半径と呼ばれ，太陽の重力半径は 2.95 km になる．

結局，計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.7}$$

と表される．ここで $f(r) \equiv 1 - r_g/r$ である．これをシュヴァルツシルト（外部）解と呼ぶ．第 5.6 節で述べるように，アインシュタイン自身は，弱い重力場の近似をして解を求め，近日点移動や光の屈折の公式を導いているが，シュヴァルツシルトは，球対称という条件があるとはいえ複雑な非線形微分方程式であるアインシュタイン方程式を厳密に解いたのである．アインシュタインはそのことを知り，驚くと同時に大いに賞賛したと言う．

5.3 シュヴァルツシルト時空中の粒子の軌道

いったん時空が決定されるとその時空中を運動する粒子の軌道は重力以外の力が働かなければ測地線方程式で記述される．シュヴァルツシルト時空は時間的に変化せず，かつ球対称なので粒子軌道には 2 つの保存量（エネルギーと角運動量）が存在する．角運動量保存は粒子の運動領域を一平面上に限定する．それを赤道面（$\theta = \pi/2$）に取ると，

$$E = -mu_0 = mf(r)\frac{dt}{d\tau}, \tag{5.8}$$

$$L = mu_\varphi = mr^2\frac{d\varphi}{d\tau} \tag{5.9}$$

が保存することになる．ここで，m は粒子の質量，u_μ は 4 元速度，τ は固有時間である．残るは動径方向（r）の振舞いであるが，その議論には 4 元速度の規格化条件 $u_\mu u^\mu = -1$ を用いるのが簡単である．その条件式は，

$$-\frac{1}{f(r)}{u_0}^2 + \frac{1}{f(r)}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{r^2}{u_\varphi}^2 = -1 \tag{5.10}$$

と表されるが，(5.8), (5.9) 式を用いると，

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V^2(r) = \left(\frac{E}{m}\right)^2 \tag{5.11}$$

となる．ここで

$$V^2(r) \equiv f(r)\left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) \tag{5.12}$$

は有効ポテンシャルと呼ばれる．

今は粒子軌道に興味があるので，(5.9) 式を用い，固有時間 τ を消去し，r と

φ の微分方程式

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{m^2r^4}{L^2}\right)\left[\left(\frac{E}{m}\right)^2 - f(r)\left(1+\frac{L^2}{m^2r^2}\right)\right] \tag{5.13}$$

を考える．ニュートン力学でよくやるように，新しい変数 $u = r_g/r$ に対する方程式に書き換えると解きやすい．軌道方程式は

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2-1}{\tilde{L}^2} + \frac{1}{\tilde{L}^2}u - u^2 + u^3 \tag{5.14}$$

となる．ここで $\tilde{E} = E/mc^2$, $\tilde{L} = L/mcr_g$ は無次元化されたエネルギー，角運動量である．ニュートン力学では最後の u^3 の項が現れないだけである．

光の屈折を議論するには固有時間を使った上の議論をそのまま使うことはできない．しかし，粒子の質量ゼロの極限を取ることで，光の場合の結果は得られる．(5.14) 式の $\tilde{E}$ や $\tilde{L}$ はその極限で発散するので意味はないが，その比 $\tilde{E}/\tilde{L}$ は有限なので (5.14) 式は意味を持つ．実際，$\tilde{b}^{-2} \equiv \lim_{m\to 0}(\tilde{E}^2-1)/\tilde{L}^2 = (Er_g/Lc)^2$ とおくと，

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{b}^2} - u^2 + u^3 \tag{5.15}$$

という光の軌道方程式が得られる．ここで $\tilde{b}$ は衝突係数 b を重力半径で規格化した量になっている．

5.4 水星の近日点移動

まず，粒子の軌道方程式を用いて水星の運動を考えよう．太陽系の惑星の軌道を考えるには，まず第 1 近似としてニュートン重力理論で考えるのが妥当であろう．この場合，(5.14) 式で u^3 を落とした式になり，簡単に積分できる．結果の軌道は

$$u = \frac{1}{2\tilde{L}^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \tag{5.16}$$

で与えられる．ここで $e = \sqrt{1+4\tilde{L}^2(\tilde{E}^2-1)}$ は軌道の離心率である．但し，ニュートン力学では静止質量は考えに入れないので，粒子のエネルギーは $E_N = E - mc^2$ $(|E_N| \ll mc^2)$ とする．この軌道は 2 次曲線を表し，

(1) $\tilde{E} < 1$ $(E_N < 0)$ のとき 楕円軌道 $(e < 1)$,

(2) $\tilde{E} = 1$ $(E_N = 0)$ のとき 放物線軌道 $(e = 1)$,　　(5.17)

(3) $\tilde{E} > 1$ $(E_N > 0)$ のとき 双曲線軌道 $(e > 1)$

と分類される．

今楕円軌道を考えよう．太陽に最も近い点では u が最大となるから，$\varphi = \varphi_0$

が近日点に対応する．ニュートン力学では，よく知られたように楕円軌道の近日点は動かない．水星の場合，離心率 $e = 0.2056$，長半径 $a = 5.786 \times 10^{12}$ cm で，$\tilde{L} = 3.064 \times 10^3$ となる．その結果 $u \approx 10^{-7}$ となり，相対論的効果は摂動として考えてよいことがわかる．

そこで，一般相対性理論を考慮した場合の軌道方程式 (5.14) の解を

$$u = \frac{1}{2\tilde{L}^2}\{1 + e\cos[(1-\delta)(\varphi - \varphi_0)]\} \qquad (\delta \ll 1) \tag{5.18}$$

とおいてみる．(5.14) 式に代入し，δ を求めると

$$\delta = \frac{3}{4\tilde{L}^2} \tag{5.19}$$

が得られる．(5.18) 式は，軌道が大まかには楕円であるが，角度が $\varphi = 2\pi/(1-\delta) \approx 2\pi(1+\delta)$ 進んだとき同じ動径位置に戻ってくることを示している．つまり，惑星は近日点から一周（2π）し，さらに

$$\varphi_{\rm PS} \equiv 2\pi\delta = \frac{6\pi GM}{(1-e^2)ac^2} \tag{5.20}$$

進んだところで再び近日点に到達することがわかる．近日点は相対論的効果で軌道の前方に少しだけ移動する．これを近日点移動と呼ぶ．水星の場合 100 年間でわずか 43.03 秒角という非常に小さな変化である．

実際の水星の観測データをここで見てみよう．観測的には水星の近日点はいろいろな効果で結構変化する．観測された値は 100 年間で (5599.74±0.41) 秒角である．しかしながらこの値には地球（観測者）が動いているために生じる見かけの効果 [(5025.645±0.50) 秒角] や木星など他の惑星の影響 [(531.54±0.68) 秒角] なども含まれている．それらのわかっている効果をすべて引き去るとわずかに (42.56±0.94) 秒角が有意に残った[4)]．

一般相対性理論の予言とものの見事に一致する．これを発見したときのアインシュタインの気持ちはどうだったであろうか．小躍りして喜んだに違いない．

5.5 光の屈折

次に光の屈折について考えてみよう．光の場合の衝突係数 b は太陽表面近くで $\tilde{b}^{-1} \approx r_g/R_\odot \approx 4 \times 10^{-6}$ である．光が屈折するあたりでは (5.15) 式の右辺 ≈ 0 であるので，$u(\sim \tilde{b}^{-1})$ は非常に小さいと考えられる．そこでまず，第 1 近似として u^3 の項を無視した式を考え，u^3 は摂動として扱う．

u^3 の項を無視すると (5.15) 式は簡単に積分でき，

$$u = \frac{1}{\tilde{b}}\cos\varphi \tag{5.21}$$

が得られる．太陽に最も接近する点を $\varphi = 0$ とした．これは直線を極座標で表したもので，第 1 近似では光は曲がらないことを表している．この直線からの

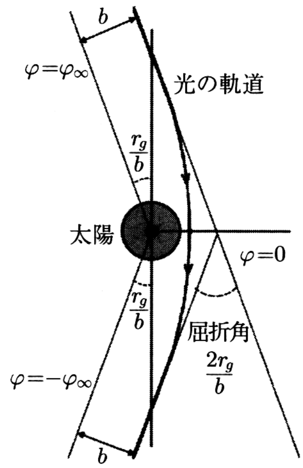


図 5.1　光の屈折.

ずれを

$$u = \frac{1}{\bar{b}}\cos\varphi + \frac{1}{\bar{b}^2}u_1(\varphi) \tag{5.22}$$

とおき，(5.15) 式に代入し，摂動項 u_1 を決定すると，

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sin^2\varphi\right) \tag{5.23}$$

が得られる.

この解がどのような屈折角を与えるかは次のようにして決めればよい. $\varphi=0$ が太陽に最も近い点であるのは変わらない. 一方，最も遠い点(無限遠点）は $u=0$ で与えられる. そのときの角度は $\varphi_\infty \approx \pi/2+1/\tilde{b}$ となる. その結果，屈折角は

$$\alpha = \frac{2}{\bar{b}} = \frac{4GM}{R_\odot c^2} \approx 1.75 \text{ 秒角} \tag{5.24}$$

となる（図 5.1).

ちなみにこの値は，以前アインシュタインが等価原理だけから導いていた値の2倍である. それは空間のゆがみを考慮していなかったからである（第 3 章).

1919 年，イギリスのエディントン卿は，その年の日食の際，この光の屈折を測定しようと遠征隊を組織し，実際にアインシュタイン理論の予言通りに光が屈折していることを確認した[5]（図 5.2). この結果は，当時，アインシュタ

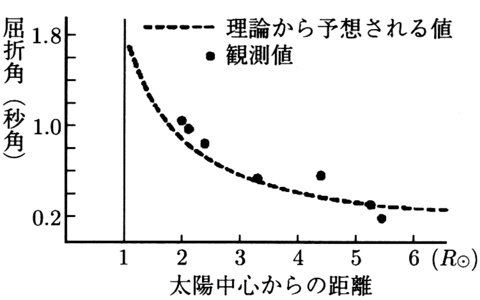


図 5.2　1919 年のエディントン遠征隊による観測結果.

インの一般相対性理論を観測的に検証したということで報道でも大きく取り上げられた．アインシュタインはそのとき自分の理論が正しいものであると確信したに違いない．

1968 年までは日食の度に検証実験が繰り返されたが，得られた屈折角は 1.43–2.7 秒角の間に分布し，それほど観測精度は上がらなかった（20–40%）．しかしながら，60 年代後半に電波望遠鏡が登場してからは事態が一変する．電波であれば，日食を待たずとも太陽近くを通ってくる“光”が観測可能なのである．電波源は 3C279 などのクェーサーが使われた[6]（図 5.3）．これにより精度は飛躍的に向上し，0.1 %の精度で一般相対性理論が正しいことが確かめられている[7]．

この光の屈折は，現在では一般相対性理論の検証というより，重力レンズ現象として天体や宇宙の観測に応用されている．

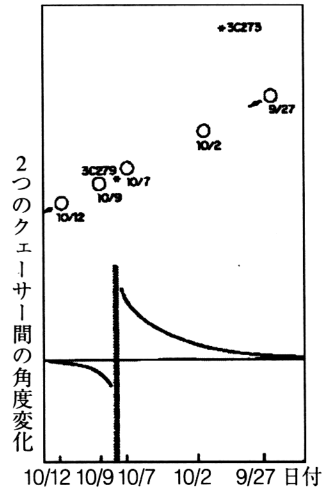


図 5.3 クェーサーの光の屈折の測定．図上部は 2 つのクェーサー (3C273,3C279) の位置と太陽の見かけの位置変化を，図下部は太陽が 3C279 のそばを通過したときの 2 つのクェーサー間の角度変化を表している．

5.6 アインシュタインの方法

ここではシュヴァルツシルト解を用いて近日点移動と光の屈折を考えたが，アインシュタイン自身は弱い重力場の近似を行い，答えを見つけた．彼が考えた座標系は空間の 3 方向が対等な等方座標 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ である．この座標系でシュヴァルツシルト解を記述すると

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - GM/2\bar{r}}{1 + GM/2\bar{r}}\right)^2 d\bar{t}^2 + \left(1 + \frac{GM}{2\bar{r}}\right)^4 \left(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2\right) \quad (5.25)$$

となる．ここで $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ である．この動径座標 $\bar{r}$ は (5.7) 式の動径座標 r と $r = \bar{r}(1 + GM/2\bar{r})^2$ のような関係がある．

アインシュタインは弱い重力場の近似で

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{\bar{r}}\right), \quad g_{ij} = \delta_{ij} + 2GM\frac{\bar{x}^i \bar{x}^j}{\bar{r}^3} \quad (5.26)$$

を導いているが，これは (5.25) 式の弱場近似である．

光の屈折に関しては，$ds^2 = 0$ からこの座標系での光速が

$$c(\bar{\boldsymbol{x}}) = \left[\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}\right)^2\right]^{1/2} = \left(1 - \frac{2GM}{\bar{r}}\right) \tag{5.27}$$

と表されることを用い，前に等価原理のところで述べたのと同じようにホイヘンスの原理を使って示している[1]．ここで注意すべきは，空間のゆがみ g_{ij} も考慮されていることである．この効果は (5.26) 式からわかるように，時間成分の効果と同じだけ影響を与えるため，等価原理のときの予言の 2 倍の値になるのである．

水星の近日点移動に関しては，(5.26) 式で表される時空中の測地線方程式を弱場近似で求め，(5.14) 式を導いている[2]．

5.7 "第 4" の検証実験

上の 2 つのアインシュタイン自身が提案した検証実験に加え，1964 年，シャピロ（I.I. Shapiro）は "第 4 番目" の検証実験を提案した[8]．これは上記の 2 つの実験とともに一般相対性理論の 3 つの検証実験となる．これが第 4 番目と言われたのは，重力的赤方偏移の実験も加えてのことであるが，それは第 3 章でも述べたように，実は等価原理の検証でしかなく，一般相対性理論そのものの検証にはなっていないことに注意しよう（第 3 章）．

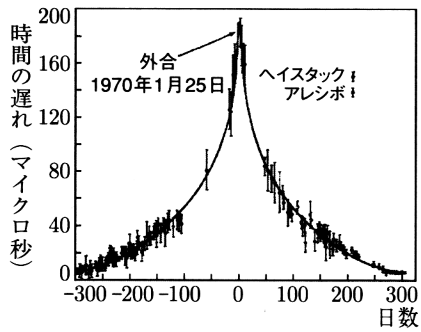


図 5.4 金星からのレーダー・エコーの遅れ[9]．

シャピロの提案は，宇宙探査機や惑星上に設置された反射板から送られる電波信号が地球に到達するまでの時間が，電波が太陽の近くを通過するときに遅れるという一般相対論的効果の測定である．予想される時間の遅れは，地球惑星間の往復の場合，

$$\Delta t = \left(240 - 20\ln\left[\left(\frac{d}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{\mathrm{AU}}{r_p}\right)\right]\right) \quad \text{マイクロ秒} \tag{5.28}$$

である．ここで d は電波が太陽に最も近づいたときの距離，AU は天文単位，r_p は地球から惑星までの距離である．この遅れをシャピロ遅延と呼ぶが，火星の探査衛星マリナーとバイキングにより非常に精度よく測定が行われ，その結果は 0.1%の精度で一般相対性理論と一致している[7,9~11]（図 5.4）．

このようにアインシュタイン理論は誕生後 90 年間ますますその精度を上げ，その正しさが示されてきている．

参考文献

1) A. Einstein, *Ann. der Phys. Ser.4*, **49** (1916) 769.
2) A. Einstein, *Preuss. Acad. Wiss. Berlin Sitzber.* **47** (1915) 831.
3) K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin*, Kl. Math-Phys. Tech. (1916) 189.
4) G.M. Clemence, *Astron. Papers Am. Ephemeris* **11** (1943) 1; *Rev. Mod. Phys.* **19** (1947) 361.
5) D. Moyer, Revolution in science: the 1919 eclipse test of general relativity *On the Path of Albert Einstein* ed. by A. Permutter and L.F. Scott (New York) 55; J. Earman and C. Glymour, Relativity and eclipses: the British eclipse expeditions of 1919 and their predecessors, *Hist. Studies Phys. Sci.* **11** (1980) 49.
6) G.A. Seielstad, R.A. Sramek, and K.W. Weiler, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 1373; D.O. Muhleman, R.D. Ekers, and E.B. Fomalont, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 1377; R.A. Sramek, *Astrophys. J. Lett.* **167** (1971) L55; J.M. Hill, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **153** 7P; E.B. Fomalont and R.A. Sramek, *Comm. Astrophys.* **7** (1977) 19.
7) C.M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* 2nd edn (Cambridge Univ. Press, 1993).
8) I.I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 789; *Phys. Rev.* **141** (1966) 1219.
9) I.I. Shapiro, M.E. Ash, R.P. Ingalls, W.S. Smith, D.B. Campbell, R.B. Dyce, R.F. Jurgens, and G.H. Pettengill, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 1135.
10) J.D. Anderson, M.S.W. Keesey, E.L. Lau, E.M. Standish Jr., and XX, Newhall, *Acta Astronautica* **5** (1978) 43; R.D. Reasenberg and I.I. Shapiro, Proceedings of the International Meeting on Experimental Gravitation, ed. B. Bertotti (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1977) 143.
11) I.I. Shapiro, R.D. Reasenberg, P.E. MacNeil, R.B. Goldstein, J.P. Brenkle, D.L. Cain, T.A. Komarek, A.I. Zygielbaum, W.F. Cuddihy, and W.H. Michael Jr., *J. Geophys. Res.* **82** (1977) 4329; D.L. Cain, J.D. Anderson, M.S. Keesey, T. Komarek, P.A. Laing, and E.L. Lau, *Bull. Am. Astron. Soc.* **10** (1978) 396; R.D. Reasenberg, I.I. Shapiro, P.E. MacNeil, R.B. Goldstein, J.C. Breidenthal, J.P. Brenkle, D.L. Cain, T.M. Kaufman, T.A. Komarek, and A.I. Zygielbaum, *Ap. J.* **234** (1979) L219.
12) C.M. Will, *Physics Today* **25** (October) (1972) 25.

アインシュタイン以外の試み

一般相対性理論誕生後，いろいろな考えから他にもいろいろと新しい重力理論が提唱されては消え，提唱されては消えていった．図 5.5 にウィル（C. Will）が昔まとめた流れ図を示しておく[12]．

現在でも状況はあまり大きく変わっていない．むしろその後の実験・観測からこの段階で生き残っている理論のパラメータに対する制限がより厳しくなり，一般相対性理論が最も自然な重力理論と言えるのである．現在提唱されているいろいろな試みに関しては第 15 章を参照のこと．

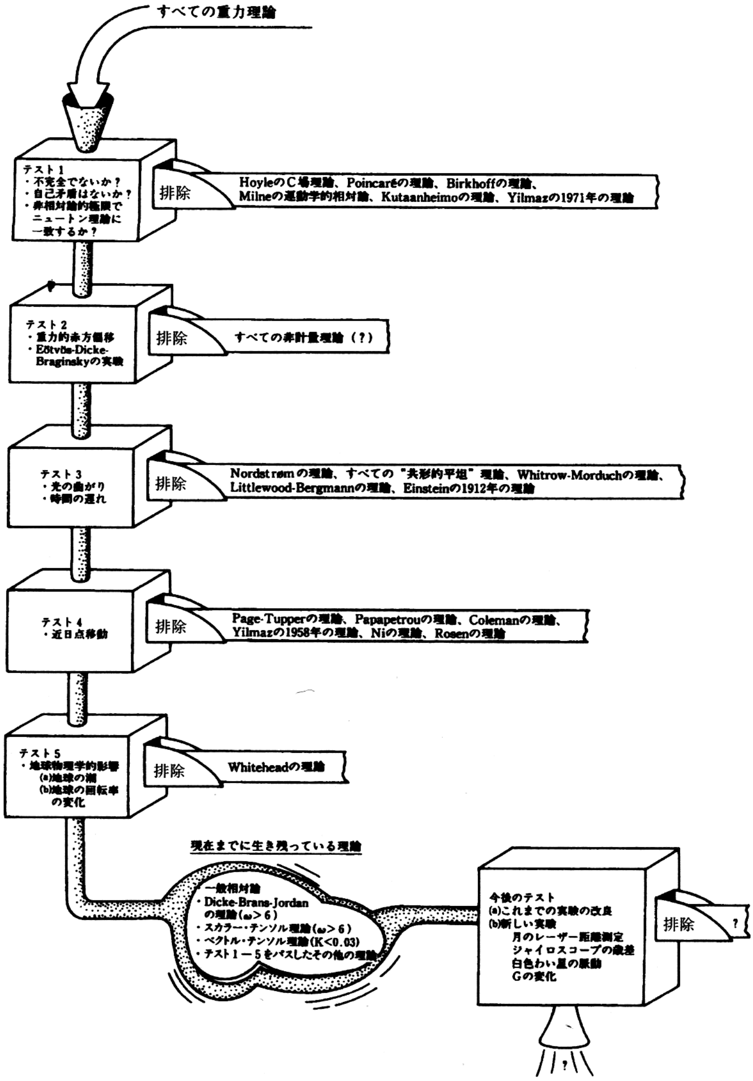


図 5.5　重力理論の検証[12]．いろいろな重力理論は，いくつかの検証実験を経て，その多くが排除されている．一般相対性理論は理論のシンプルさにも関わらず，すべての実験をパスしている．

第 6 章
アインシュタインの予言：その1　宇宙論

6.1　境界のない有限宇宙

「宇宙に果てはあるのか」という疑問は誰しもが思い浮かべることであるが，考えただけで答えの出るものでもない．ニュートン重力理論に基づく宇宙論では我々の住む宇宙（空間）は単なる「入れ物」で，平坦なユークリッド空間と考えられる．ユークリッド空間は無限に広い．では我々の住むこの宇宙はどこまで行っても存在する無限に広い世界なのか．もちろんこれを実際に確かめる術はないが，現実の世界では「無限」というものは存在しないとするのが常識的な考え方であろう．「無限」というのはあくまで非常に大きな「量」の数学的近似表現である．

ところが宇宙が有限なユークリッド空間だと考えると当然，境界が必要となる．つまり宇宙には「果て」があることになる．宇宙の「中心部」と「境界」付近では大きく様相が異なるであろう．宇宙はどこも同じではないことになる．しかしそれも考えにくい．次節でも述べるように宇宙はどこでも同じであると考えたい．そうすると，有限でかつ境界のない世界を考えなければならなくなる．ユークリッド空間では無理である．

曲がった空間の導入は，そのような困難を解決する．簡単な 2 次元の例を考えよう．2 次元ユークリッド空間（平面）は無限に広く，有限にするにはどこかで切り取って境界を作らなくてはならない．しかしながら 2 次元球面は，どこも同じで，かつ有限である．あるところから出発してまっすぐ行くとそのうちに元のところに戻ってくる．境界は存在しない．

3 次元空間で同じようなことを考えると，有限でかつ境界のない宇宙が実現可能なのである．そして重要なことは，アインシュタインの一般相対性理論はその時空の曲がり方がどうなるかを決定する理論なのである．アインシュタインの理論を用いると宇宙が「科学」として議論できるのである．

6.2　宇宙原理

アインシュタイン方程式は非常に複雑で，そう簡単には解けないだろう．それで方程式を具体的に解くにはいくつかの仮定が必要になる．我々の宇宙をどう記述するのがいいだろうか．宇宙には星があり，銀河があり，銀河団があり，と非常に複雑な階層構造をしているように見える．しかしながら，例えば銀河の分布を見ると，大きなスケールではほぼランダムに存在しているように見える．大きなスケールで平均を取ると均一な密度分布をしていると考えられる（図 6.1 参照）[1]．

これを「宇宙の一様性」と呼ぼう．また，宇宙に特別な方向があるだろうか？ どちらを向いても同じような世界が広がっていると想像できる．これを「宇宙の等方性」と呼ぶ．この 2 つの要請は宇宙を全体として見るときにはごく自然な仮定と考えられる．このように我々の宇宙が「一様」かつ「等方」であるとすることを「宇宙原理」と呼び，通常，宇宙を考えるときの前提とする．

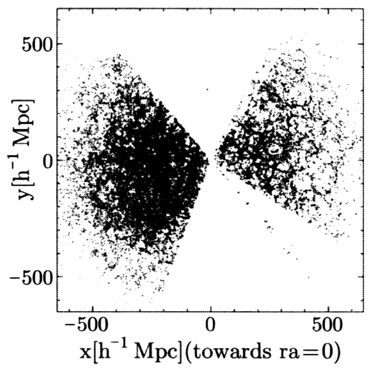
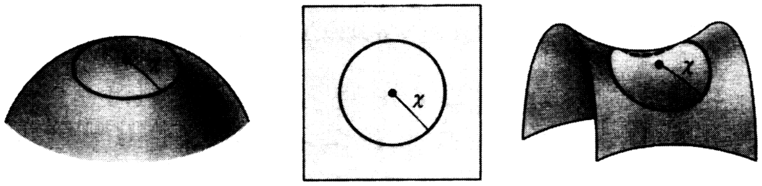


図 6.1　SDSS（SLOAN DIGITAL SKY SURVEY）による 67,676 個の銀河の空間分布[1]．

それを仮定すると問題をどこまで簡単化できるであろうか？ 3 次元空間を考えよう．一様かつ等方ということは 3 次元の空間曲率が場所によらず同じである，つまり等曲率空間を考えるということである．この等曲率空間はその曲率の符号により 3 つの種類が考えられる．つまり，曲率が正，ゼロ，負の 3 つである．2 次元空間（曲面）で想像すると考えやすい（図 6.2 参照）．曲率正の 2 次元曲面は前に述べた球面である．曲率ゼロの曲面はユークリッド平面．曲率負の曲面は想像しにくい．それは，その曲面が 3 次元空間に埋め込めない



$k=+1$（曲率正）　$k=0$（曲率ゼロ）　$k=-1$（曲率負）

図 6.2　3 種類の等曲率空間．曲率ゼロのユークリッド平面では円周は半径の 2π 倍に，曲率正の球面では 2π 倍より短くなる．曲率負の場合は逆に 2π 倍より長くなる．

ためで，我々の頭の中で想像できない（図に描けない）からである．局所的には鞍型の曲面がよく引用される（図 6.2 右）．鞍の中心から円を描くと，その円周は半径の 2π 倍より大きくなる．ちょうど球面の場合と逆である．このことからそこでの曲率は負であることがわかる．しかしこの図ではその面が「一様」（どこも同じ）には見えない．図には描けないが，それでもそのような曲面が存在するのは想像できるであろう．

実際の世界は 3 次元空間なので，さらに想像性をたくましくして，上で述べた 2 次元の世界をもう 1 次元上げて考えないといけない．曲率正が 3 次元球面，ゼロが 3 次元ユークリッド空間，負が 3 次元擬球面となる．

数学的には簡単である．次のような 3 次元計量は等曲率空間を与える．

$$ds_3^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{1}{\left[1+\frac{1}{4}K(x^2+y^2+z^2)\right]^2}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right). \quad (6.1)$$

定数 K が曲率の大きさを表す．これは 3 つの空間座標 x, y, z について対称なので，等方性は明らかである．また 3 次元リーマン曲率を計算すると

$$^{(3)}R^{ij}{}_{kl} = K\left(\delta^i{}_k\delta^j{}_l - \delta^i{}_l\delta^j{}_k\right) \quad (6.2)$$

となる．これから曲率は場所によらない一定値 K を持つことがわかる．

計量 (6.1) はより都合のよい極座標表示で書かれることが多い．具体的には，次の 2 つのどちらかが用いられる．

$$\begin{aligned} ds_3^2 &= a^2\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \\ &= a^2\left[d\chi^2 + f(\chi)^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

である（$0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$）．ここで，$a$ および k は，$K \neq 0$ のとき $a^2 \equiv 1/|K|$ および $k \equiv K/|K| = \pm 1$ で，$K = 0$ のときは a を任意定数とし，$k = 0$ とおく．また $f(\chi)$ は次の関数で定義される．

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & (K > 0), \\ \chi & (K = 0), \\ \sinh\chi & (K < 0). \end{cases} \quad (6.4)$$

宇宙原理だけから計量の空間部分がほぼ決定されるのである．

6.3 アインシュタインの静的宇宙モデル

宇宙原理から上の 3 つの空間が考えられるが，その中で体積が有限なものは曲率正の場合である*1)．当然，アインシュタインは「宇宙は有限である」とい

*1) 定曲率空間ということだけを課すのであれば曲率ゼロや負の場合でも同一視により有限な空間を構成できる[2)]．

う考えから曲率正の 3 次元球面を選んだ．

アインシュタインが要請したもう一つの条件は「時間的に変化しない宇宙」である．当時の常識からして宇宙が変化するという発想は浮かばなかったのかもしれない．宇宙は無限の過去から始まり，未来永劫に変わることなく存続する不変的な存在である，と考えたのである．しかしここで少し妙なことに気が付くであろう．空間的には有限でなければならないと考えたにも関わらず，時間的には無限の存在を仮定したのである．このあたりは，人の考えることの限界を見るようで非常に興味深い．とにかく時間的に変化しない静的な宇宙を考えるとアインシュタイン方程式は以下の 2 式に帰着される．

$$\frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho c^2, \quad -\frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4}P. \tag{6.5}$$

ここで ρ は宇宙を満たす物質の質量密度，P はその圧力である．通常の物質では $\rho c^2 \gg P$ であるので圧力項を無視すると，この方程式を満たす解は存在しない．

多くの思考実験から導いた一般相対性理論．水星の近日点移動も予想とピタリと一致した．有限で境界のない宇宙も自分の方程式は扱うことができる．そう自負して宇宙の姿を明らかにしようと取り組んだところ，自分の方程式は望むべき宇宙の存在を否定することを知ったアインシュタインの失望はいかばかりであっただろうか．

「理論の基本的なところは間違っていないはずである．ほんの少しの変更で我々の宇宙が説明できないか？」そう考えたアインシュタインは，初めに考えた一般相対性理論にある項を付け加える．宇宙項と呼ばれる定数項である*2)．第 4 章でも述べたように，アインシュタイン方程式を導くには 3 つの原理が前提であった．その中で，一般共変性は基本原理なので変更できない．エネルギー・運動量保存則も物理的に正しいと考えられる．あと一つの「弱場近似でニュートン重力に一致する」というのは実験的に確かめられた事実だが，せいぜい太陽系スケールでしか確かめられていない．宇宙のような大きなスケールでは変更を受けてもいいかもしれない．そこでアインシュタインはアインシュタイン方程式に長さの逆二乗の次元を持つ項 Λ を付け加えた．

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{6.6}$$

当然 Λ としては，宇宙の大きさ（現在の観測ではおよそ 100 億光年）の逆二乗程度の値を想定している．弱い重力場の極限を取ると

$$\Delta\phi = 4\pi G\,(\rho + \rho_\Lambda) \tag{6.7}$$

となる．ここで $\rho_\Lambda \equiv \Lambda c^2/8\pi G$ は定数項であるが，この部分が余分にニュー

*2) (6.6) 式の新しく付け加えた項を宇宙項，その項に含まれる Λ を宇宙定数と呼ぶのが正確であるが，実際にはあまり区別しないで使われている．

トン・ポテンシャル ϕ に寄与する．この定数「密度」の効果が大きいと観測と矛盾するが，例えば太陽系スケールのある半径 r までに含まれるこの項による「質量」 $M_\Lambda(r) \equiv \frac{4\pi}{3}\rho_\Lambda r^3$ を考えると（Λ の観測的上限値を用いても）

$$\frac{M_\Lambda(r)}{M_\odot} \sim 10^{-36}\left(\frac{r}{\mathrm{AU}}\right)^3 \tag{6.8}$$

とほとんど観測できないほど小さい効果でしかない．ここで $M_\odot$ は太陽質量，AU は天文単位（太陽・地球間の距離）である．

今考えている宇宙モデルを新しい方程式 (6.6) で考えると，

$$\frac{1}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho c^2, \quad -\frac{1}{a^2} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}P \tag{6.9}$$

となる．圧力項を無視すると，

$$\Lambda = \frac{1}{a^2} = \frac{2\pi G}{c^2}\rho \tag{6.10}$$

という解が得られる．宇宙が（修正したとはいえ）自分の理論で説明できると知ったとき，アインシュタインは自分の理論の正しさを再認識したであろう．1917 年のことである[3]．この解はアインシュタインの静的宇宙モデルと呼ばれる．

このアインシュタインのモデルが出たすぐあと，ドジッター（W. de Sitter）は，宇宙項がある場合には，真空（$\rho = 0$）でも次のような静的な宇宙解（ドジッター解）が構成できることを示した[4]．

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{6.11}$$

ここで $R \equiv (\Lambda/3)^{-1/2}$ である．この解は後々いろいろな意味で重要となる．

6.4 フリードマンの膨張宇宙論

アインシュタインは物理的にいろいろな要請をし，その結果，宇宙項を導入することになった．それに対し，ロシアの数学者フリードマン（A. Friedmann）は，アインシュタイン方程式を先入観なしに解くことを試みていた[5]．1922 年のことである．アインシュタイン方程式で，宇宙原理を仮定すると 3 次元計量は (6.3) 式のようになるが，それは各時刻ごとに空間の計量がそうなっていなければならないというだけで，宇宙の大きさを表すスケールファクター a は時間に依存してもよいことになる．宇宙原理はあくまで空間に対する要請で，時間変化に対しては何も言っていないのである．そこで a を時間 t の関数とすると 4 次元計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{6.12}$$

となる．ここで時間に対する座標変換の自由度を用いて，その計量 g_{00} を -1 とおいたが，このようにして決めた時間 t を宇宙時間と呼ぶ．

スケールファクターに時間依存性を入れた点は，物理的に非常に大きなジャンプであったことを認識しておく必要がある．数学的には a は 1 つの計量で，一般的には時間・空間座標の関数である．今，宇宙原理から空間座標依存性はなくなり，時間のみに依存する関数と考えるのは非常に自然である．しかし，一旦それを認めると宇宙が時間的に変化することになりこれまでの常識を大きく変えなくてはいけない．そういう意味で，時間依存性の導入は数学的には自然でも，物理的には大きな飛躍と言える．宇宙に関する認識を根本的に変えなければならないのである．前に一般相対性理論の登場は時空物理学の誕生と書いた（第 3 章）．このフリードマンが考えた動的宇宙論こそまさに時空物理学の典型であると言える．

上の計量 (6.12) を仮定し，アインシュタイン方程式を書き下すと，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho c^2, \tag{6.13}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}P \tag{6.14}$$

が得られる．ここでドット（$\dot{}$）は時間微分を表す．(6.14) 式はエネルギー・運動量保存則（例えば $P = 0$ とすると $\rho a^3 =$ 一定）を考えに入れると (6.13) 式を微分することで得られるので，実質的には宇宙の方程式は (6.13) 式で与えられる．これをフリードマン方程式と呼ぶ．この式は $\rho \propto a^{-3}$ とすると，a に関する常微分方程式となり，初期の宇宙密度とスケールファクターを与えれば簡単に解くことができる．

フリードマンのこの研究のあと，いろいろな研究者がこの動的宇宙モデルを解析している．ルメートル（J. Lemaitre）は最も精力的にその研究を行った一人だが[6]，その中でも興味深いのはドジッター解が座標変換

$$\bar{r} = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} e^{-\frac{t}{R}}, \quad \bar{t} = t + \frac{1}{2}R\ln\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{6.15}$$

によって，膨張宇宙解

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + e^{2\bar{t}/R}\left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \tag{6.16}$$

に書き換えられるという事実である[7]．また，エディントンたちは上の動的なフリードマン方程式を解析し，方程式の特殊解として含まれるアインシュタインの静的宇宙解が動的には不安定な解であることを示している[8]．つまり，アインシュタインの静的宇宙解に少しでも摂動を与えると，動的な宇宙解に移行するというわけだ．

6.5 ハッブルの発見

アインシュタインは，初めフリードマンのこの理論を相手にしなかった．それはたぶん宇宙に対する考え方からであろう．しかしながら，1929年にハッブル（E. Hubble）が発見した銀河の後退速度と赤方偏移の関係は，宇宙が膨張していることを示唆しているのである．

どうして宇宙の膨張が観測でわかるのであろうか．計量 (6.12) を見ると2点間の固有距離はスケールファクター a に比例する．もし a が時間変化していれば当然その距離も変化する．観測者（我々）が座標原点（$r=0$）にいるとし，ある銀河が座標位置 r_0 にあったとする．その間の距離は $l=a(t)r_0$ となる*3)．今 a がフリードマンが主張するように時間的に増大しているとしよう．すると我々から見るとその銀河は遠ざかっていることになる．その速度は

$$v=\dot{l}=\dot{a}r_0=\frac{\dot{a}}{a}\,l \tag{6.17}$$

で与えられる．つまり遠方の銀河ほど我々からより速く遠ざかっていることになる．またその速度は銀河までの距離 l に比例している．その比例係数を

$$H=\frac{\dot{a}}{a} \tag{6.18}$$

とおくが，これは宇宙の膨張率（単位時間あたりの距離の変化率）を表しており，その現在（t_0）の値をハッブル定数と呼び $H_0=H(t_0)$ と書く．

遠ざかる銀河の速度は光の赤方偏移を観測すればわかる．速度が光速に比べて十分小さければ赤方偏移は速度に比例する．遠方の銀河をたくさん観測し，その距離と赤方偏移を観測することで，(6.17) 式の関係を確かめれば，宇宙が膨張していることがわかるのである．これがハッブルが示したことである（図 6.3）．

ハッブルが実際に観測したのは宇宙全体の大きさ（およそ100億光年）に比べると非常に狭い範囲（約10000分の1）にある銀河である．この図を見るとわかるが，赤方偏移と距離の間には確かに大ざっぱな線形関係が存在するが，まだ実際にはこの領域では銀河の固有速度が上のハッブル速度 v とそれほど変わらないので，線形関係からの揺らぎも大きい．現在では，

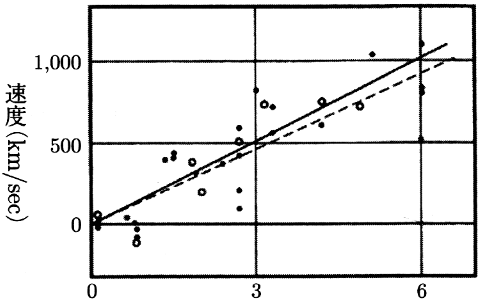


図 6.3 ハッブルの法則[9]．銀河の後退速度と距離がほぼ比例関係にある．

*3) 今，宇宙の空間曲率が無視できる程度に近い距離を考えているので，k の値によらずこう言える．

より詳細な観測から，十分遠方（宇宙全体のスケール近く）まで確かにそのような線形関係があるのが確かめられ，さらには宇宙の曲率の影響が見えるところまで観測が進んでいる．大いなる先見の明であった．この観測はフリードマンの膨張宇宙論を強く支持した．

ちなみにこの観測結果は，アインシュタインの静的宇宙モデルでは説明できず，膨張宇宙論の証拠と考えるのが最も自然であるが，ドジッター解 (6.11) も（膨張宇宙解とも解釈できるため）上の観測事実を説明することができる．宇宙項のおかげで，物質のない真空の宇宙が観測事実と合うのである．何とも皮肉なことであった．

6.6 アインシュタインの大失敗

宇宙が時間的に変化することを認めると，アインシュタイン方程式に宇宙項など導入する理由がなくなる．実際，フリードマンは 1922 年の論文で，すでに $\Lambda = 0$ の解も議論している．そしてアインシュタイン自身も 1931 年には $\Lambda = 0$ の宇宙論を考え[10]，1932 年にはドジッターとの共著で宇宙項なしの宇宙論を提唱している[11]．今日，宇宙論の最も簡単なモデルとして知られるアインシュタイン・ドジッター宇宙モデルである．これは空間が平坦な 3 次元ユークリッド空間（$k = 0$）とし，$\Lambda = 0$ の物質優勢の宇宙である．スケールファクターは $a \propto t^{2/3}$ のように時間的に膨張する．

当時アインシュタインは，静的宇宙を構成するために宇宙項を手で持ち込んだのは自分の生涯で最大の失敗だったと振り返っている．実はある意味で同じような失敗をブラックホールに関連してもやっている（第 8 章参照）．しかしながら，自ら作りあげた一般相対性理論を使えば宇宙の構造が科学的にきっちりと議論できることを初めて示したわけで，その意味で，アインシュタインの宇宙論における貢献は極めて大きいものと言える．

アインシュタインが大失敗だったといったこの宇宙項は，その後何度も宇宙論の舞台に登場するが，80 年代に登場したインフレーション理論[12]では姿を変えた主役（真空のエネルギー）として，またダークエネルギーと呼ばれる現在の宇宙の加速膨張[13]においてはその起源として重要な役割を果たしている．

参考文献

1) M. Tegmark *et al.*, *Astrophys. J.* **606** (2004) 702.
2) 前田恵一『宇宙のトポロジー』(岩波書店).
3) A. Einstein, *S.B. Preuss. Akad. Wiss.* (1917) 142.
4) W. de Sitter, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam* **19** (1917) 1217.
5) A. Friedmann, *Zeits. f. Phys.* **10** (1922) 377; **21** (1924) 326.
6) J. Lemaitre, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **47A** (1927) 49.
7) J. Lemaitre, *J. Math. Phys.* **4** (1925) 4; H.P. Robertson, *Phil. Mag.* **5** (1928) 835.
8) A.S. Eddigton, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **90** (1930) 668; W.H. McCrea and G.C. McVittie, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **91** (1930) 128; **92** (1931) 7; J. Lemaitre,

Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **91** (1931) 490.

9) E. Hubble, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (1929) 168.

10) A. Einstein, *S.B. Preuss. Akad. Wiss.* (1931) 235.

11) A. Einstein and W. de Sitter, *Proc. Nat. Acad.* **18** (1932) 213.

12) 真空のエネルギー（宇宙定数と等価）を使ったインフレーション宇宙モデルは，グースと佐藤（勝）によって独立に，80 年代初頭に提唱された．[A.H. Guth, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 347; K. Sato, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **195** (1981) 467.]
一方，量子補正による曲率高次項を使った指数膨張宇宙モデルはスタロビンスキーによりそれより早く議論されている．[A.A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30** (1979) 682; *Phys. Lett.* **B 91** (1980) 99.]

13) ダークエネルギーの存在を初めに指摘したのが超新星 Ia 型を使った観測である．[A.G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009; S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565; B.P. Schmidt *et al.*, *Astrophys. J.* **507** (1998) 46.]
その後，WMAP による 3K 宇宙背景輻射の揺らぎの詳細な解析から宇宙モデルの決定が行われ，ダークエネルギーの存在が決定的となった．[C.L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148** (2003) 1; WMAP Collaboration, D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148** (2003) 175; 最近のデータは http://map.gsfc.nasa.gov/を参照．]

第7章 アインシュタインの予言：その2　重力波

ニュートン重力理論では，物質の密度分布が与えられれば重力ポテンシャルは即時に決定される．それはポアッソン方程式 $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ が時間を含まない方程式であるからで，そのことが特殊相対性理論と矛盾し，一般相対性理論の登場となった．一般相対性理論では，重力を時空のゆがみと捉える．時空のゆがみを表す計量はアインシュタイン方程式に従うが，それは計量の2階微分方程式で，時間微分も含まれる．計量，つまり時空は時間変化することになる．前章の宇宙論の話はその典型である．この章では，時間変化する時空のもう一つの典型である時空のゆがみの伝播について述べる．アインシュタイン方程式を考えると，時空のゆがみはさざ波のように伝わっていくことがわかるが，それを重力波と呼ぶ．重力波はどのように表されるのであろうか？ ここでは，時空のゆがみが非常に小さい場合を考えることにしよう．

7.1　重力波の予言：アインシュタイン方程式の線形化

時空のゆがみが非常に小さいということは，時空はミンコフスキー空間に近いということである．そこで計量を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{7.1}$$

と近似する．ここで $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量で，弱い重力場を表す計量 $h_{\mu\nu}$ は，その大きさが1に比べ十分小さいとする．$h_{\mu\nu}$ を摂動量と考え，アインシュタイン方程式を書き下すと，

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}R^{(1)}(h_{\alpha\beta})\eta_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{7.2}$$

となる．ここで，$R^{(1)}_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta})$, $R^{(1)}(h_{\alpha\beta})$ は，それぞれリッチテンソル，スカラー曲率の $h_{\alpha\beta}$ に関する摂動1次の項で，

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\left[\partial^\alpha\partial_\nu h_{\mu\alpha} + \partial^\alpha\partial_\mu h_{\nu\alpha} - \partial^\alpha\partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\right], \tag{7.3}$$
$$R^{(1)}(h_{\alpha\beta}) = \partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\beta\partial_\beta h \tag{7.4}$$

で与えられる．ここで $h \equiv h^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ である．

上の (7.2) 式は少しわかりにくいので新しい変数 $\bar{h}_{\mu\nu}$ を

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{7.5}$$

で定義する．この変数を使うと線形化されたアインシュタイン方程式 (7.2) は

$$-\partial^\alpha\partial_\alpha\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} + \partial^\alpha\partial_\mu\bar{h}_{\nu\alpha} + \partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\mu\alpha} = 16\pi G T_{\mu\nu} \tag{7.6}$$

となる．

今，座標変換

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{7.7}$$

を考えると，計量は

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi_\mu - \partial_\mu\xi_\nu \tag{7.8}$$

と変換される．ここで $\xi^\mu(x)$ は微小な任意関数である*1)．一般共変性から $h_{\mu\nu}$ と $\tilde{h}_{\mu\nu}$ は対等であるが，今この 4 つの座標変換の自由度 $\xi^\mu(x)$ を用いて上の方程式をさらに簡単にしよう．通常はローレンツゲージ

$$\partial_\nu\bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{7.9}$$

が課される*2)．

この座標条件 (7.9) を用いると (7.6) 式は

$$-\partial^\alpha\partial_\alpha\bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu} \tag{7.10}$$

のように簡単になる．

(7.10) 式を考える前にマックスウェルの電磁気学を考えよう．ベクトルポテンシャル A^μ を用いるとマックスウェル方程式は

$$-\partial_\alpha\partial^\alpha A^\mu = 4\pi J^\mu \tag{7.11}$$

のように表される．ここではローレンツゲージ

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{7.12}$$

を課した．(7.10) 式は (7.11) 式と非常によく似ている．ベクトルとテンソルの

*1) ここでは時空のゆがみが小さいので座標変換も微小変換のみを考える．

*2) この条件を課しても $\partial^\beta\partial_\beta\xi^\mu = 0$ を満たす ξ^μ の座標変換の自由度は残されるので，ローレンツゲージは座標系を完全には決定しない．

違いはあるが，どちらもローレンツ不変な波動方程式であり，その源は電流密度 J^μ やエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ によって与えられる．

計量は時空のゆがみを記述するので，この式はミンコフスキー時空からの微小なゆがみが電磁波のように光速で伝わることを示している．これが重力波である．線形化されたアインシュタイン方程式 (7.10) にはマックスウェル方程式同様に，波として振る舞う解を含むのである．マックスウェルは電磁波の存在を予言し，光は電磁波であることを主張した．彼の予言はヘルツにより実験的に確かめられ，マックスウェル理論は確固としたものとなった．

一般相対性理論は重力波を予言する．それはニュートン重力理論を相対論化したことによる必然と考えられるが，実際に時空のゆがみが重力波として宇宙空間を伝播するというのは実に壮大な話である．まさに時空のダイナミクスの誕生と言える．この重力波の存在を予言したのは，アインシュタイン自身で，1918 年のことである[1]．

7.2 空間のゆがみの伝播：測地線偏差方程式

しかしもう一度よく考えてみよう．自由落下系に移ると計量はいつでも局所的にミンコフスキー計量になる（$h_{\mu\nu} = 0$）．ある座標系で計量が波のように変化するからといって，本当に物理的な現象なのであろうか？ 自由落下系にいる人は時空のゆがみの変化が波のように伝わるのを本当に観測するのであろうか？

ここで思い出してほしいのは，時空のゆがみは曲率によって記述されるという事実である（第 4 章）．曲がっていない時空において勝手な座標変換をすると計量は座標に依存するが，曲率はゼロである．逆に，曲がった時空で自由落下系に移ると局所的にミンコフスキー計量を設定できるが，曲率はゼロではない．

そこで，時空のゆがみの伝播が見かけのものでなく，物理的実在であることを見るには，曲率の変化を調べる必要がある．自由落下系では重力（つまり計量の 1 階微分）を消すことができる．しかし，潮汐力（計量の 2 階微分，つまり曲率）を消すことはできない．潮汐力は少し離れた 2 点間に働く重力の差であるから，少し離れた 2 つの質点 I, II の軌道の差を見てやるといい．

いま重力しか働かない質点を考えると，その軌道は測地線方程式

$$\frac{D^2x^\mu}{d\tau^2} \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{7.13}$$

で表される．上に述べたように軌道に与える曲率の効果を見るには，2 つの質点の軌道 I ($x^\mu(\tau)$), II ($x'^\mu(\tau)$) の差 $\xi^\mu(\tau) = x'^\mu - x^\mu$ の振舞いを見てやればよい（図 7.1）．その方程式は，測地線偏差の方程式と呼ばれ，

$$\frac{D^2\xi^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}u^\nu u^\rho \xi^\sigma \tag{7.14}$$

で与えられる．ここで $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ は質点Iの4元速度である．

測地線偏差の方程式 (7.14) は曲率を含むので，実際の時空のゆがみが2つの質点の軌道差にどう影響を与えるのかを見ることができる．

ここで重力波を表していると考えられる計量成分の抽出を考えよう．電磁波同様に，重力波も真空中を伝播すると考えられる．その基礎方程式は

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{7.15}$$

で与えられる．真空中の重力波は，座標変換の自由度を用いて，次のような条件を満たす計量 $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(\mathrm{TT})}$ によって記述できる．

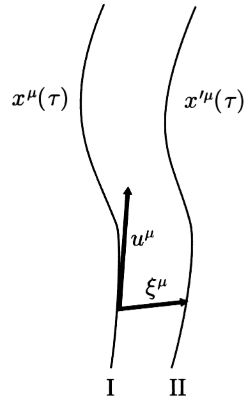


図 7.1 2つの質点の軌道 I, II. u^μ は質点Iの4元速度，$\xi^\mu = x'^\mu - x^\mu$ は2つの質点の軌道差である．

1. $h_{0\nu}^{(\mathrm{TT})} = 0.$
2. $\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{(\mathrm{TT})} = 0.$
3. $\partial^\nu h_{\mu\nu}^{(\mathrm{TT})} = 0.$

条件1からこの計量は空間成分 h_{ij} しか非自明な成分を持たないが，そのことと条件3から $\partial^j h_{ij}^{(\mathrm{TT})} = 0$ が得られる．これは重力波が横波であるという条件と同じである．この3つの計量条件を横波・トレースゼロ（**t**ransverse **t**raceless）条件と呼び，(TT) という添え字をつけて表す．またこの座標条件を TT ゲージとも呼ぶ．トレースがゼロであるので $h_{\mu\nu}^{(\mathrm{TT})} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(\mathrm{TT})}$ である．

この波をもう少し具体的に見てみよう．簡単のため，z 軸方向に進む平面波解

$$h_{\mu\nu}^{(\mathrm{TT})} = A_{\mu\nu} \exp[ik_\alpha x^\alpha] \tag{7.16}$$

を考える．ここで $A_{\mu\nu}$ は定数テンソルで振幅を，k_μ は波数ベクトルを表す．波動方程式 (7.15) から $k_\alpha k^\alpha = 0$ が得られ，z 軸方向に進む波を考えているので，$k^\alpha = (\omega, 0, 0, \omega)$ となる．$A_{\mu\nu}$ の対称性および横波・トレースゼロ条件より，$A_{\mu\nu}$ は次のように表される．

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

ここで h_+ と $h_\times$ は定数振幅である．

電磁波同様に，重力波も横波で2つの偏極（h_+, $h_\times$）を持つことがこの式か

らわかる．それをもう少し具体的に見るために，前に述べた測地線偏差の式を使って，この平面重力波が2つの軌道差に与える影響を見てみよう．今のTTゲージ条件を使うと曲率は h の1次までの近似で

$$R_{\mu 00\nu} = \frac{1}{2}\partial_0\partial_0 h^{(\mathrm{TT})}_{\mu\nu} \tag{7.18}$$

と表される．そこで質点の速度変化が小さい近似を考えると，測地線偏差の式は

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\xi^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{\mu}{}_{\sigma}{}^{(\mathrm{TT})} \tag{7.19}$$

となる．この (7.19) 式を，2つの質点が初期に xy 面上で少し離れている，つまり $\xi = (0, \xi^{(1)}(0,z), \xi^{(2)}(0,z), 0)$ とした場合に解くと，任意の時刻での軌道差は以下のようになる．ここでは $h_+ = 0$ と $h_\times = 0$ の場合を別々に考え，h の1次までの近似で解を与える．

(1) $h_\times = 0$ の場合

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t,z) \\ \xi^{(2)}(t,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}h_+ e^{-i\omega(t-z)}\right)\xi^{(1)}(0,z) \\ \left(1 - \frac{1}{2}h_+ e^{-i\omega(t-z)}\right)\xi^{(2)}(0,z) \end{bmatrix}. \tag{7.20}$$

(2) $h_+ = 0$ の場合

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t,z) \\ \xi^{(2)}(t,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{(1)}(0,z) + \frac{1}{2}h_\times e^{-i\omega(t-z)}\xi^{(2)}(0,z) \\ \xi^{(2)}(0,z) - \frac{1}{2}h_\times e^{-i\omega(t-z)}\xi^{(1)}(0,z) \end{bmatrix}. \tag{7.21}$$

この解の意味を理解するには次のように考えればいい．ξ^μ は2つの質点の軌道の差であるので，それを今質点Iから見たもう一つの質点IIの位置と見なすことができる．その重力波による相対位置の変化を見やすくするために，質点IIとして複数個（例えば8個）考え，xy 面上の円周上に等間隔に置き，重力波が通過したときの位置変化を見るとわかりやすい．具体的には図7.2の一番左の図のように質点群を配置する．それが重力波が通過したときにどのように時間的に変化するかを示したのが，それより右の図である．つまり円上にばらまいた質点群の位置は h_+ の場合十字状に，$h_\times$ の場合はクロス状に振動することがわかる．これが，この重力波が通過したときに予想される質点の相対位置変化である．このように重力波には2つの偏極モード（h_+：+ モード，$h_\times$：× モード）が存在する．

7.3 重力波の放出機構

(7.10) 式は波動方程式であるが，アインシュタイン方程式を単に線形化，つまり弱い重力場の近似で書き表したものであるので，重力源の作る重力場も記述するはずである．これはちょうど，物質の質量分布を与え，ニュートンポテンシャル ϕ を求めるニュートンの重力理論の拡張になっている．(7.10) 式は形

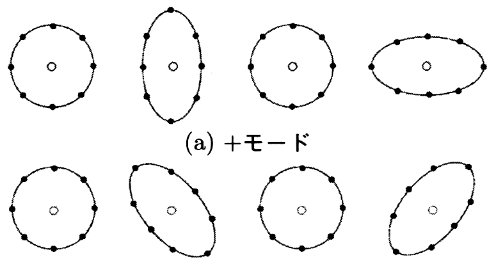


図 7.2 重力波が通過したときの質点の相対位置（質点 I から見た質点 II の位置）変化．初期（左端）に円周上に置かれた質点 II の位置が時間とともにどう変化するかを示している．(a) は + モード，(b) は × モードの重力波が通過した場合である．わかりやすいように質点 II はいろいろな方向に 8 個置かれている．

式的には

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) = 4G \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{7.22}$$

のように積分形で表される．

ニュートン近似では，$T_{00} = \rho$ であるので，ニュートンの重力ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{1}{4}\bar{h}_{00} = -G \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{7.23}$$

で与えられる．

一般に (7.22) 式は物質のエネルギー・運動量によって重力場 $\bar{h}_{\mu\nu}$ がどのように与えられるかを示している．重力波もその重力場に含まれるので，この式を解析すると重力波が物質の運動によってどのようにして発生するかがわかる．ここでは，重力源から十分離れた領域での重力場がどのように記述されるかを見よう．簡単のため，重力源の運動はゆっくりしている場合を考える．

最初に (7.22) 式のフーリエ変換を考える．

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{r}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt \int d^3\boldsymbol{r}' e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\ &= 4G \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{e^{i\omega|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{r}').\end{aligned} \tag{7.24}$$

ここで重力源（サイズを Δr とおく）から十分離れており（$|\boldsymbol{r}| \gg \Delta r$），重力源の運動がゆっくりしている（$\Delta r \ll \omega^{-1}$）とすれば，$e^{i\omega|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \sim e^{i\omega r}/r$ と近似できる．つまり，

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{r}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3\boldsymbol{r}' \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{r}') \tag{7.25}$$

となる．今取っているローレンツゲージ条件から $\tilde{\bar{h}}^{0\nu} = i\omega^{-1}\partial_i \tilde{\bar{h}}^{i\nu}$ の関係があ

るので，$\tilde{\bar{h}}^{ij}$ を求めれば，$\tilde{\bar{h}}^{0j}$ と $\tilde{\bar{h}}^{00}$ はその関係から決定される．(7.25) 式の右辺を評価すると[*3)]

$$\begin{aligned}
\int d^3\boldsymbol{r}'\tilde{T}^{ij}(\omega,\boldsymbol{r}') &= \int d^3\boldsymbol{r}'\partial_k\left(r'^{(i|}\tilde{T}^{k|j)}(\omega,\boldsymbol{r}')\right) \\
&\quad - \int d^3\boldsymbol{r}'r'^{(i|}\partial_k\left(\tilde{T}^{k|j)}(\omega,\boldsymbol{r}')\right) \\
&= i\omega\int d^3\boldsymbol{r}'r'^{(i|}\tilde{T}^{0|j)}(\omega,\boldsymbol{r}') \\
&= \frac{i\omega}{2}\int d^3\boldsymbol{r}'\left[\partial_l\left(r'^i r'^j\tilde{T}^{0l}(\omega,\boldsymbol{r}')\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - r'^i r'^j\partial_l\tilde{T}^{0l}(\omega,\boldsymbol{r}')\right] \\
&= -\frac{\omega^2}{2}\int d^3\boldsymbol{r}'\tilde{T}^{00}(\omega,\boldsymbol{r}'). \qquad (7.26)
\end{aligned}$$

この式の変形では，エネルギー・運動量保存則 $-\partial_k\tilde{T}^{k\mu}=i\omega\tilde{T}^{0\mu}$ を用いている．

4 重極モーメント

$$I_{ij}(t) = \int d^3\boldsymbol{r}'\tilde{T}^{00}(t,\boldsymbol{r}') \qquad (7.27)$$

を用いると (7.25) 式から

$$\bar{h}_{ij}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{2G}{r}\frac{d^2I_{ij}}{dt^2}(t-r) \qquad (7.28)$$

となる．これは重力波が重力源の 4 重極モーメントの時間変化によって生成されることを示している．電磁波の場合は電荷分布の双極子モーメントの変化，つまり電荷の振動により発生した．重力波の場合には，負の質量というものが存在しないので，4 重極の変化を必要とするのである．

7.4 重力波の存在

重力波が電磁波のように物理的実在とすれば，エネルギーを持つはずである．重力波がエネルギーを持っているとすれば，それ自身も時空をゆがめるのであろうか．しかしアインシュタイン方程式の右辺（エネルギー・運動量テンソル）には重力波のエネルギーは含まれていない．重力波のエネルギーはどのように定義され，どこに含まれているのであろうか．実は，一般相対性理論ではエネルギーを局所的に定義することはできない．重力場のエネルギーはそれ自身非常に難しい問題を含んでいる．ここでは，重力場の弱い場合には，その摂動量 $h_{\mu\nu}$ の 2 次形式で与えられるということだけ述べておこう．

アインシュタインによって予言された重力波は，その後，多くの科学者がその

*3) $(i|\cdots|j)$ は添字 i,j について対称化する記号である．例えば A^i, B^{ij} に対しては $A^{(i|}B^{|j)k}=\frac{1}{2}\left(A^iB^{jk}+A^jB^{ik}\right)$ となる．

重力場のエネルギー

重力場は物理的実在であるので当然エネルギーを持っていると考えられる．ただ，それを時空のゆがみと捉えるため，他の場とは異なる扱いを受ける．実際，アインシュタイン方程式の右辺に現れるエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ には重力場は含まれない．一方，エネルギー・運動量の保存則 (4.30) に現れる微分は共変微分で，それを偏微分で書き直すと

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g} T_\mu{}^\nu\right) = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} T^{\alpha\beta} \neq 0 \tag{7.29}$$

のようになる．つまり $T_{\mu\nu}$ だけでは局所的には保存しない．そこでアインシュタインはこの保存則を次のように書きかえた[2)]．

$$\partial_\nu \left[\sqrt{-g}\,(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\right] = 0. \tag{7.30}$$

ここで，$t^{\mu\nu}$ は計量の 1 階微分で表される複雑な二次形式である．これを用いると，漸近的平坦な時空において空間的超曲面 Σ 上の積分

$$P^\mu = \int_\Sigma dS_\nu \left[\sqrt{-g}\,(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\right] \tag{7.31}$$

は，保存されることがわかる．この保存量 P^μ は系の全エネルギー・運動量と考えられる．(7.31) 式右辺の第 1 項は重力を除く物質場のエネルギー・運動量テンソルであるから，アインシュタインはこの $t^{\mu\nu}$ を重力場のエネルギー・運動量と呼んだ．

しかし，これはテンソルではなく，重力場のエネルギー・運動量擬テンソルと呼ばれる．またこの表式は，ローレンツ変換などの線形変換に対しては共変的であるが，計量の 1 階微分しか含まないため，適当な座標系をとればどこでも（また，どのような世界線に沿っても）消してゼロにすることができる．逆に，直感的には重力エネルギーを持たないことが予想されるミンコフスキー空間に対しても曲線座標系をとることでその成分がゼロでなくなる．

また，この擬テンソルは一意的に決まらず，アインシュタインが与えたもの以外にも，ランダウ (Landau)・リフシッツ（Lifshitz）の与えたもの[3)]を含み数多く提案されている．実際，ゴールドベルグ（J. Goldberg）[4)] は，このエネルギー擬テンソルが無限個存在することを証明している．さらに，一般的な定義は難しいので，静的（または定常的な）時空のような制限された状況を考え，物理的に意味があると思われる重力場の局所エネルギー密度がいろいろ定義されている[5)]．

無限遠方で測定する場合の系の重力エネルギーの定義は明確になっている．空間的超曲面上では ADM 質量[6)]が，また光的超曲面上ではボンディ質量[7)]がそれぞれ正しいエネルギーを与える．それぞれの不変な定式化が与えられ，またそれらの間の関係も確立されている[8)]．しかしながら「重力場の局所的エネルギー密度は定義可能か？」といった議論は現在も続けられている．重力場のエネルギー（および，運動量・角運動量）はいまだに解決されていない一般相対性理論の基本的かつ最も重要な問題の一つである．

存在を確かめようと努力している．残念ながら現在までにその存在を直接確かめる実験はないが，間接的証拠はある．1974 年にハルス（R.A. Hulse）とテイラー（J.H. Taylor, Jr）によって発見された連星パルサー PSR B1913+16 は，非常に正確にその軌道が明らかにされているが，それが重力波放出による軌道変化とぴったりと一致する[9)]．1993 年，彼らは，「重力研究の新しい可能性を拓いた新型連星パルサー発見」の功績によりノーベル物理学賞を受賞している．

現在，重力波の直接観測を目指し，いくつかの大型観測プロジェクトが進んでいる．近い将来，重力波の存在を示すだけでなく，新しい天文学の手段（電磁波，ニュートリノに次ぐ第 3 の目）として重力波は期待されている[10)]．

参考文献

1) A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin Sitzber.* 1918, 154.
2) A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. (Berlin) Sitzungsber. 1111.
3) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, 場の古典論 (1941).
4) J. Goldberg, *Phys. Rev.* **111** (1958) 315.
5) L.B. Szabados, *Living. Rev. Relativity* **7** (2004) 4.
6) R. Arnowitt, C. Deser, and C. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (New York, Wiley) 227.
7) H. Bondi, M.G.J. van der Burg, and A.W.K. Metzner, *Proc. R. Soc.*, **A 269** (1962) 21; P.K. Sachs, *Proc. R. Soc.*, **A 270** (1962) 103.
8) J. Winicour, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 861; A. Ashtekar and R.O. Hansen, *J. Math. Phys.* **19** (1978) 1542.
9) R.A. Hulse and J.H. Taylor, Jr, *Astrophysical Journal*, **195** (1975) L51.
J.H. Taylor, Jr., *Rev. Mod. Phys.* **66** (1994) 711.
10) 中村卓史・三尾典克・大橋正健 編著「重力波をとらえる—存在の証明から検出へ」(京都大学学術出版会，1998).

第 8 章
アインシュタインの予言：その3　ブラックホール

ここではアインシュタイン理論の寵児とも呼ぶべき奇妙な天体「ブラックホール」について述べる．この章のタイトルを見て「おやっ」と思われた方は多いと思う．アインシュタインは，宇宙論が科学的に議論できることを示し（第6章），時空のさざ波である重力波の存在を予言している（第7章）．しかし「ブラックホール」に関しては全く言及していないのでは？ 全くそのとおりである．それにも関わらずこのタイトルにしたのは？ ブラックホールの特徴である「事象の地平線」（シュヴァルツシルト特異点）に関して，アインシュタインはいくつかの根拠から自然界に存在しないものと考えた．そのあたりの話も紹介するので，少々こじつけではあるが，「アインシュタインの予言：その3」としてブラックホールの話題を取り上げる．

8.1　「重力半径」の怪

第5章でシュヴァルツシルト解について話をした．それは，球対称な重力源（例えば星）の外部の時空を記述するアインシュタイン方程式の厳密解である[1)]．その計量は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{(1-r_g/r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad (8.1)$$

で表される．ここで $r_g = 2GM/c^2$ は重力半径である．この解の表す時空は，第5章でも述べたように，重力場の弱いところ（例えば太陽系近傍）では観測的・実験的に正しいことがわかっている．

ところがこの計量 (8.1) には「特異点」が存在する．例えば，g_{00} は $r=0$ で発散し，$r=r_g$ でゼロになる．$r=0$ は，重力源が「一点」に収縮した「質点」上における重力場を表していると考えられるので，計量が発散するのは理解で

ブラックホールの名付け親

「ブラックホール」という呼び名は，相対性理論研究の大御所であるアメリカの物理学者ジョン・ホイラー（J.A. Wheeler）が，1967 年晩秋ニューヨークで開催されたパルサーの国際会議，および 12 月にアメリカ科学振興協会で行った講演「我々の宇宙：既知と未知」の中で初めて使った[2,3]．そのネーミングの良さから，ブラックホールという言葉は，科学者の間だけでなく一般社会にもまたたく間に知れ渡った．それ以前は「崩壊した星」とか「凍結した星」などと呼ばれていた．

きる*1)．$r = r_g$ で計量がゼロとなるのはどう理解したらよいであろうか．この「特異点」を当時はシュヴァルツシルト特異点と呼んだ．

実際，この $r = r_g$ というところ（球面）は次のような奇妙な性質を持つ．空間のある点に静止した観測者（$dr = d\theta = d\varphi = 0$）の固有時間 τ は

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt \tag{8.2}$$

で与えられる．$r \to \infty$ で $d\tau \to dt$ となることからわかるように，時間座標 t は無限遠の観測者が計る時間である．また，$d\tau < dt$ であるから，ある半径 r にいる観測者の時間 τ は無限遠の観測者の時間 t よりゆっくり進む．これは重力場中の時間の遅れを表している．そしてその半径 r を重力半径 r_g に近づける（$r \to r_g$）と $d\tau$ がゼロ，つまりそこでは時間が経過しないように見える．

もう一つ奇妙な振舞いを見てみよう．時刻一定（$dt = 0$）の 3 次元空間で動径方向（r 方向）にわずかに離れた 2 点（$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$）間の距離 dl は，

$$dl = \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}} dr \tag{8.3}$$

であるので，$dl > dr$ である．r は，$r =$ 一定で表される球面の表面積が $4\pi r^2$ となるように決めた動径座標であるので，$dl \neq dr$ ということは，空間がユークリッド空間ではなく，曲がっているということを意味している．ここで，$r \to r_g$ の極限をとると，$dl \to \infty$ となるが，これはこの $r = r_g$ で空間が無限に曲がっていることを意味するのであろうか？

8.2 アインシュタインの第二の失敗

当時（1920–30 年代）は，そのような半径 r_g が実在するのかどうかということが議論されていた．1922 年のパリ会議ではアインシュタインのまわりに錚々たるメンバーが集まり，シュヴァルツシルト特異点について議論されたと言う．またエディントンはそれをマジック・サークル（magic circle）と呼び，その内部は測定不可能だとした[4]．その問に対する一つの答えを出したのがアインシュタインである[5]．

*1) 質点の作るニュートンポテンシャルも $r = 0$ で発散する．

シュヴァルツシルトは上の真空解以外にも物質が存在する場合の球対称静的解を導いていた[6]．シュヴァルツシルトの内部解と呼ばれるもので，$r \leq R$ の領域は次のような計量で記述される．

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{8.4}$$

$$e^{\Phi} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}, \tag{8.5}$$

$$e^{\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1/2}, \tag{8.6}$$

$$P = \rho_0\left[\frac{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}}\right]. \tag{8.7}$$

ここで ρ_0（一定），$P(r)$ はそれぞれ星のエネルギー密度と圧力，R は星の半径，$m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3$ は半径 r 内に含まれる質量である．また $M = m(R)$ は星の重力質量である．この計量は，エネルギー密度が一定の星の内部の時空を記述し，$r = R$ で真空のシュヴァルツシルト解 (8.1) に連続的につながる．

シュヴァルツシルトは，$R < 9r_g/8$ の場合，星の内部にも $g_{00} = 0$ となる点（シュヴァルツシルト特異点）が存在することを指摘したが，アインシュタインは，密度一様の星の仮定は，星を構成する物質中の音速が無限大になるため相対論的に正しくない仮定であるとして，「重力半径」が実現される例とは言えないとした[5)*2)]．

しかし，この場合は，次のような理由で「重力半径」は実現されないと考えたほうがいいであろう．この解を解析すると半径が $R = 9r_g/8$ で中心の圧力が無限大になり，もはや星を支えきれなくなり，$R < 9r_g/8$ の星は存在しないことがわかる．エネルギー密度一定という条件を「密度は外に向かって増大しない」という条件にゆるめたとしてもこの結果は変わらない．つまり，球対称の星をいくら小さくしても重力半径以下には縮めることができないということである．

アインシュタインが「重力半径」が実現されない理由として挙げた例は，多くの粒子が球状に集まった「星」である[5]．一つの粒子は他の粒子のつくる平均重力場の中を運動する．彼は簡単のため，円軌道を描いた質点の集まりを考えた．非常に多くの質点を均一に分布させて平均密度が球殻上で一様になるようにし，また全角運動量がゼロとなるような系を想定する．アインシュタインは薄い球殻上に粒子が局在する場合を具体的に解析し，この系を重力半径以下に縮めることができないことを示した．その物理的解釈として，球殻の半径が

---

*2) 非圧縮性流体の仮定は，圧力を変化させても密度が変わらないので，音速が無限大になり，相対論的に正しくない．しかし，重力と圧力勾配が釣り合った結果として，星の密度が一様ということは相対論と矛盾した仮定ではない[7]．その意味でシュヴァルツシルトの内部解は解析解で表すことのできる最も簡単な「相対論的星の模型」である．

r_g に達する前に粒子の速度が光速を超えてしまうことを指摘している．この例を根拠に，アインシュタインは，$r = r_g$ というシュヴァルツシルト特異点（実際には球面）は現実の世界では現れないとした．

ところが，同じ 1939 年，オッペンハイマー（J.R. Oppenheimer）とシュナイダー（H. Snyder）は，“On continued gravitational contraction” というタイトルの論文を発表し，上限質量を超えた中性子星はなんの問題もなく $r = r_g$ という重力半径を超えて限りなく収縮していくことを示した[8)][*3)]．星や球殻という「定常的な」対象では重力半径を超えられないが，重力崩壊という「動的な」現象を考えると重力崩壊の結果非常に自然に重力半径が真空中に出現することが示せるのである．アインシュタインは，宇宙論に続き，またしても，「定常」時空を想定し「動的」時空を考えなかったために，間違った結論を導いてしまったのである．

8.3 重力半径の本当の意味：事象の地平線

では，シュヴァルツシルト時空の $r = r_g$ という点は一体どういうものであろうか？ まず，そこで計量は特異になるが，時空の特異点ではないことがわかる．一般相対性理論では座標系はどんな取り方をしてもかまわない．その結果，計量そのものは物理的実在を直接に表さない．実際，局所慣性系をとればいつでもそこではミンコフスキー計量におくことが可能である．物理的実在としての時空を考えるには座標系の取り方に依存しない幾何学量，つまり曲率を見なければならない．そこでリーマン曲率の 2 乗（$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$）を計算すると $12r_g^2/r^6$ となり，$r = r_g$ では特異でないことがわかる[*4)]．

シュヴァルツシルト特異点は時空の特異点ではない．重力崩壊によって簡単に出現する．では，それは全く普通の時空点なのか？ その本当の意味が明らかにされたのは，なんと 1950 年代以降のことである．

$r = r_g$ では一体何が起こっているのか？ それをはっきりさせるには，そこで計量が特異とならない座標系を導入しなければならない．1958 年にフィンケルシュタイン（D. Finkelstein）は，$r = r_g$ が特異にならない座標系を発見し[*5)]，その面においては，物体の運動が一方通行であることを示した[14)]．彼は時間 t に代わる新しい座標として

---

*3） 同じ年にオッペンハイマーとボルコフ（G. Volkoff）は中性子星に上限質量が存在することを示している[9)]．

*4） “原点”（$r = 0$）は，曲率がそこで実際に発散するので，本当の特異点である．

*5） 彼が発見した座標系は，実はエディントンが昔すでに見つけていたもの[10)]を再発見したものであるが，エディントン自身はその意味を十分には理解していなかったようである．また，エディントンのあとルメートルも $r = r_g$ が特異でない座標系を見つけている[11)]．彼らの見つけた座標系はシュヴァルツシルト時空の半分を記述するものであるが，すべてをカバーする座標系は後にシング（J.L. Synge）やフロンスダル（C. Fronsdal）によって発見されている[12,13)]．

$$\tilde{V} = t + r*, \quad \text{または} \quad \tilde{U} = t - r* \tag{8.8}$$

を導入した．ここで

$$r* \equiv r + r_g \ln \left| r/r_g - 1 \right| \tag{8.9}$$

である．$\tilde{V}$ のほうを用いると計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}dr + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{8.10}$$

で表される．この $(\tilde{V}, r, \theta, \varphi)$（または $(\tilde{U}, r, \theta, \varphi)$）をエディントン・フィンケルシュタイン座標系と呼ぶ．

この計量 (8.10) の表すところを見るには，4 次元時空での光の伝播，つまり光円錐の振舞いを調べればよい．それは，物体は光の速さを超えて運動できない，つまり光円錐の内部を進むため，時空の因果的領域がはっきりするからである．まず初めに，ミンコフスキー時空の光円錐を見てみよう（図 8.1）．角度方向は省略しているので，2 次元半平面 (r, t) $[r \geq 0]$ がミンコフスキー時空を表している．ここで光は ±45° の方向に進むので，光円錐は図 8.1 のようになる．

次に，シュヴァルツシルト時空を考えよう．この時空においても物体の運動がどうなるかを調べるために，まず光円錐を考える．シュヴァルツシルト座標 (8.1) で光円錐を記述すると図 8.2 のようになる．$r > r_g$ では光円錐は立っているので，t の増える方向に粒子は進むが，$r < r_g$ では光円錐は横を向き，r の減少する方向に粒子が進む．つまり，その領域では t は時間的な座標ではなく，r も空間的座標ではなくなる．また，r_g に近づくと光円錐が非常に細くなり，座標系が適切でないことがわかる．

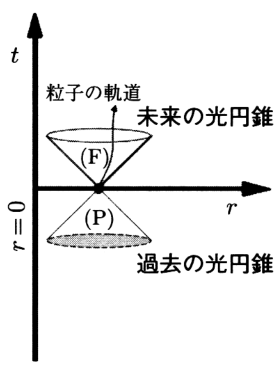


図 8.1 ミンコフスキー時空と光円錐．±45° が光が進む方向を表し，粒子はそれで作られる光円錐内部を通る．

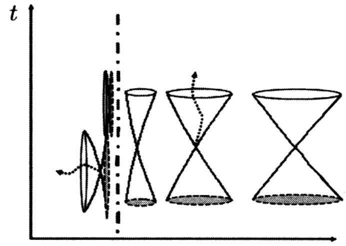


図 8.2 シュヴァルツシルト時空の光円錐（シュヴァルツシルト座標系）．

そこで，エディントン・フィンケルシュタイン座標系を考えよう．計量 (8.10) から，光の経路が $\tilde{V}=$ 一定（内向き）と $\tilde{U}=$ 一定（外向き）で表されることがわかる．この座標系での光円錐を図示するために，時間座標として $\tilde{V}$ の代わりに $\tilde{t}\equiv\tilde{V}-r$ を用いる．

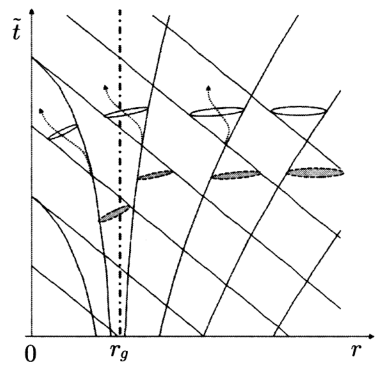


図 8.3　シュヴァルツシルト時空の光円錐（エディントン・フィンケルシュタイン座標系）．

光円錐の振舞いは図 8.3 に示されている．この図からわかることは，内向きの光はいつも $-45°$ の方向に進む．それに対し，外向きの光は，遠方では $+45°$ の方向に進んでいるが，中に入ってくるに従い，だんだん急になり，外に行きにくくなることがわかる．そして $r=r_g$ のところで傾きが無限大になり，"外向き" の光は外には出て行かずに，$r=r_g$ 上を進むことがわかる．$r<r_g$ の領域に入ると，"外向き" の光は外には進まず，逆に内を向いていることもわかる．

このように $r\leq r_g$ では，未来の光円錐が r_g より内側に閉じ込められる．すべての物体は光円錐の内側を通るので，このことは r_g より内側にあるすべての物体は r_g を超えて外には出てこられないことになる．この一方通行となる領域の境界が重力半径 r_g なのである．重力半径 r_g より内側からは光といえども出てこられない．これが一般相対性理論が予言する「ブラックホール」である．r_g より外側にいると r_g の向こう側（内側）は全く見えないことから，この重力半径 r_g で表される球面を「事象の地平線」と呼ぶ．

しかし，まだ問題があった．上で導入した座標 $\tilde{V}(=t+r*)$ の代わりに $\tilde{U}(=t-r*)$ のほうを使ってシュヴァルツシルト時空を記述することもできる．そうすると上の議論はすべて逆になってしまう．重力半径 r_g の内側から出てくることは可能になり，逆に外側から内側には光といえども行けなくなる．

これはどういうことか？ 座標系を取り替えただけで物理が変わってしまうのはおかしいのでは…

8.4　ブラックホールとホワイトホール

その答えは，1960 年クルスカル (M.D. Kruskal) とセケレス (G. Szekeres) によって独立に導入された新しい座標系によって明らかとなった[15,16]．彼らが見つけた座標系は次のようなものである．

$$
\tilde{u} = -e^{-\tilde{U}/2r_g} = -\left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} e^{r/2r_g} e^{-t/2r_g},
$$
$$
\tilde{v} = e^{-\tilde{V}/2r_g} = \left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} e^{r/2r_g} e^{t/2r_g}. \tag{8.11}
$$

この新しい座標を使うとシュヴァルツシルト時空は

$$
ds^2 = -\left(\frac{4r_g^3}{r}\right) e^{-r/r_g} d\tilde{u} d\tilde{v} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{8.12}
$$

となり，光の経路は $\tilde{u} =$ 一定，または $\tilde{v} =$ 一定の直線で表される．さらに，新しく u, v という座標を $u = \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u}), v = \frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u})$ で定義すると，

$$
ds^2 = \left(\frac{4r_g^3}{r}\right) e^{-r/r_g} \left(-dv^2 + du^2\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{8.13}
$$

となり，v はすべての時空点で時間的に，u はすべての時空点で空間的になる．また (u, v) 面上では，ミンコフスキー空間のときのように，$\pm 45°$ が光の伝播方向になる．この u, v をクルスカル・セケレス座標と言い，それを使ってシュヴァルツシルト解の時空図を表したものをクルスカル図と言う（図 8.4）．

この図を使うと，時空の因果的領域が一目瞭然となる．つまり，図 8.5 のように，ある点 P を考えたとき，そこから $\pm 45°$ の方向に伸ばした直線が光の経路を表し，通常の光速より遅い物体は，上の領域 (F)（未来の光円錐）の内部

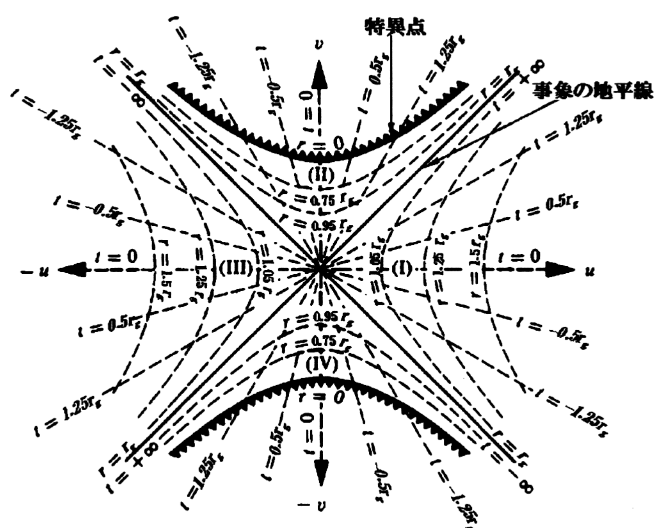


図 8.4　シュヴァルツシルト時空のクルスカル図．点線はシュヴァルツシルト座標（t と r）が一定の等高線．$\pm 45°$ が光が進む方向を表し，物体の軌跡はそれで作られる光円錐内部を通る．事象の地平線（r_g）が $\pm 45°$，つまり光が進む方向（ヌル方向）に一致するため，事象の地平線は因果的領域の境界となる（図 8.5 参照）．

光の脱出できない暗黒の星

光の速さが有限であることから，光が重力圏から脱出できない天体，つまり真っ黒で見えない暗黒の星は，ミッチェル（J. Michell, 英）やラプラス（P.S. Laplace, 仏）によって，18 世紀にすでに考えられていた[17,18]．彼らが考えたのは次のような天体である．質量 M，半径 R の星の脱出速度は $v_{\rm esc} = \sqrt{2GM/R}$ で与えられる．星の表面から放り出された物体の初速 v_0 が $v_{\rm esc}$ より遅ければ，物体は無限遠方まで達することができず，再び星に戻ってくる．そこで，もし星の質量が非常に大きいか，半径が非常に小さいと，$v_{\rm esc}$ は光の速さ c を越える*1)．つまり星の表面から放出された光は遠方にいる我々のところまでやってこないで，星表面に戻ってしまうというわけである．光が外（遠方）に出てこないという意味では，「ブラックホール」という天体の最初の予言であると言える．しかし，一般相対性理論が予言したブラックホールはもっと奇妙な“天体”なのである．

*1) その条件は $R < r_g$ となり，そのような暗黒の星になる上限半径は偶然にも重力半径と一致する．

を通過していく．また，その点に来るには下の領域 (P)（過去の光円錐）の内部を通って来なければならない．領域 I の点 P を考えると，外向きの光は特異点にぶつからず，内向きの光は特異点と交差する．このことは，点 P から出発した物体は，r_g を超えてブラックホール（領域 II）に吸い込まれ特異点にぶつかるか，無限の未来までずっと r_g の外側にいるかのどちらかである．それに対し，領域 II の点 Q から出発すると，r_g の外側（領域 I）に出ることができず，有限時間で必ず特異点にぶつかる．つまり事象の地平線（$r = r_g$）は時空の因果的領域を分ける境界面だったのである．但し，境界といってもそれは一方通行の境界で，外にある物体は，ずっと外にいることも可能だし，地平線を越えて特異点に落ちていくこともあり得る．

ここまでの結論であれば，前の節のエディントン・フィンケルシュタイン座標系でも十分考察可能であった．前節の最後の疑問に答えるには，クルスカル・

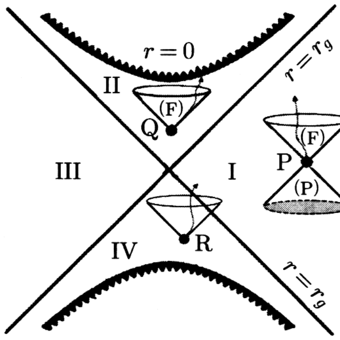


図 8.5　シュヴァルツシルト時空のクルスカル図．±45° が光が進む方向を表し，物体の軌跡は光円錐の中（領域 (F), (P)）を通る．地平線（$r = r_g$）の外（点 P）にある物体は，ブラックホール（領域 II）に吸い込まれるか，無事ブラックホールの外で一生を終えるかのどちらかであるが，領域 II（点 Q）にある物体は，領域 I には出られず，必ず特異点（$r = 0$）にぶつかる．また，領域 IV 内の物体（点 R）を考えると，必ず $r = r_g$ を超えて領域 I または領域 III に出て行く（ホワイトホール）．

セケレス座標系の領域IVを考えればよい．領域IVの点Rを出発した物体を考えよう．同じように光円錐の内部を通過する．この場合，点Rの光円錐は必ず $r = r_g$ を超えて領域Iまたは領域IIIに出て行く．つまり点Rから出た物体は必ず領域Iか領域IIIに出て行くのである．一方，領域I（または領域III）の点を出発した物体は r_g を超えて領域IVに入ってくることはない．

これらのことから次のことが結論される．エディントン・フィンケルシュタイン座標系のうち $\tilde{V}$ を用いたものは領域Iと領域IIを，$\tilde{U}$ を用いたものは領域Iと領域IVを記述していたのである．実際，(8.11) 式から，$-\infty < \tilde{V} < \infty$ と等価な $0 < \tilde{v} = v + u < \infty$ は領域Iと領域IIに，$-\infty < \tilde{U} < \infty$ と等価な $-\infty < \tilde{u} = v - u < 0$ は領域Iと領域IVに対応していることがわかる．領域Iと領域IIの境界を「未来の事象の地平線」，領域Iと領域IVの境界を「過去の事象の地平線」と呼ぶ．また，領域IIをブラックホール，領域IVをホワイトホールと呼ぶ．

ここで妙なことに気がついた読者はいるであろうか？ 領域Iは $r > r_g$ で表されるように，無限遠方（$r \to \infty$）を含むので，ブラックホールの外側にいる重力の弱い我々の世界だと考えられる．では領域IIIは何であろうか？ 同じように $r > r_g$ で表され，無限遠方（$r \to \infty$）を含む．我々の世界とどう違うのであろうか？

実は，シュヴァルツシルト解は，数学的には，2つの漸近的平坦な領域（ミンコフスキー時空）をもつ多様体（時空）を表しているのである（第11章参照）．

参考文献

1) K. Schwarzschild, Sitzber. *Deut. Acad. Wiss. Berlin, Kl. Math-Phys. Tech.* (1916) 189.
2) J.A. Wheeler, *American Scientist*, **56** (1968) 1.
3) K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps—Einstein's Outrageous Legacy—* (W.W. Norton & Company, 1994, New York) p.256.
4) J.-P. Luminet, *Black Holes* (Cambridge Univ. Press, 1987) p.120.
5) A. Einstein, *Ann. Math.*, **40** (1939) 922.
6) K. Schwarzschild, *Sitzber. Deut. Acad. Wiss. Berlin, Kl. Math-Phys. Tech.* (1916) 424.
7) C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973) p.609.
8) J.R. Oppenheimer and H. Snyder, *Phys. Rev.* **56** (1939) 455.
9) J.R. Oppenheimer and G. Volkoff, *Phys. Rev.* **55** (1939) 374.
10) A.S. Eddington, *Nature* **113** (1924) 192.
11) G. Lemaitre, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles I* **A53** (1933) 51.
12) J.L. Synge, *Proc. R. Irish Acad.* **A53** (1950) 83.
13) C. Fronsdal, *Phys. Rev.* **116** (1959) 778.
14) D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110** (1958) 965.
15) M.D. Kruskal, *Phys. Rev.* **119** (1960) 1743.
16) G. Szekeres, *Publ. Mat. Debrecen* **7** (1960) 285.
17) J. Michell, *Phil. Trans. R. Soc. London* (1783) 35.
18) P.S. Laplace, *Le Systeme du monde (The System of the World)* vol.II (1795, Paris).

第 9 章
時空の対称性と一様宇宙のダイナミクス

アインシュタインによって提唱された一般相対性理論は，宇宙物理学に新しい研究対象をもたらした．宇宙を科学として議論できる対象にし，重力波やブラックホールという全く新しい概念も宇宙の舞台に登場させた．宇宙の理解には一般相対性理論は不可欠な理論の一つになったのである．しかしながらその理論は複雑な非線形偏微分方程式で記述されている．そこで，その基礎方程式であるアインシュタイン方程式の解き方と解について語っていこう．

9.1　時空の対称性とキリングベクトル

一般に非線形方程式は，線形方程式と異なり，一般解を求めることがほとんど不可能である．そこで必要となるのは，物理学的に興味のある系をいかにしてうまく記述するかである．

その一つの方法として，対象とする系に対し対称性を課し，方程式をできるだけ簡単にすることが考えられる．例えば静的球対称を仮定すると基礎方程式は動径座標 r のみの常微分方程式になる．もちろん非線形で，いくつかの変数が絡み合うので，解析的に解けるかどうかはわからないが，それでも扱いは一段と簡単になる．

そこでこの章ではまず対称性のある時空を考えることにしよう．ところがいきなり困難に出くわす．「対称性」を課すにはどのようにしたらいいかという問題である．時間的に変化しない静的な時空なら，単純に計量が時間に依存しないとすればよいではないかと考えるかもしれない．しかし，一般相対性理論は一般座標変換に関して不変で，座標系を好きなように選択できる．そのことは時空に対称性があっても，勝手な座標系を選ぶと，計量にはその対称性が陽には見えないことを意味している．例えば，前章のブラックホールの議論でも出てきたが，静的シュヴァルツシルト解も，ブラックホールの性質，特に地平線付近での性質を明らかにするクルスカル・セケレス座標を用いると計量は時

間に依存する．静的な解だからといって計量は必ずしも時間によらないとは限らないのである．そこで，座標系の選択によらない「対称性」の定義が必要になる．

そのためにまずリー微分を定義しよう．時空のある点 $\mathrm{P}(\{x^\mu\})$ から，ベクトル ξ^μ 方向に微小な量 $\epsilon(\ll 1)$ だけ移動した点 $\mathrm{Q}(\{\tilde{x}^\mu\})$ を考える．つまり

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu \tag{9.1}$$

である．前にリーマン空間での微分を議論したときに注意したことであるが（第4章），異なる点におけるテンソル量の差はテンソルにならない．点 P におけるテンソルと点 Q におけるテンソルの差で意味のある量を定義するために，点 P から点 Q への写像 $\phi_\epsilon : Q = \phi_\epsilon(P)$ を定義する．そうすると，点 P におけるテンソル $T(P)$ は点 Q におけるテンソル $\phi^*_\epsilon T(Q)$ に写像される．このとき $\phi^*_\epsilon T(Q)$ は $T(P)$ を座標変換 (9.1) により変化させたものである．こうすると $\phi^*_\epsilon T(Q)$ は点 Q のテンソルではあるが，$T(P)$ を座標変換して得られたものであるので，$T(P)$ と等価と考えられる．そこで同じテンソルの点 Q における値 $T(Q)$ との差を取ることで，テンソル T の点 P と点 Q における違いがわかる．この差を見れば，ベクトル ξ^μ 方向にテンソル T がどの程度変化するかがわかる．その差を ϵ で割り，$\epsilon \to 0$ の極限を取ることで，その変化量を微分で表すことができる．これをリー微分と呼ぶ．具体的には，リー微分 $\mathcal{L}_\xi$ は，

$$\mathcal{L}_\xi T(P) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} \frac{T(Q) - \phi^*_\epsilon T(Q)}{\epsilon} \tag{9.2}$$

で定義される．スカラー場 Φ の場合 $\phi^*_\epsilon \Phi(Q) = \Phi(P)$，ベクトル場 A^μ の場合 $\phi^*_\epsilon A^\mu(Q) = (\partial\tilde{x}^\mu/\partial x^\nu)A^\nu(P)$ であるので，そのリー微分を具体的に成分表示すれば，それぞれ

$$\mathcal{L}_\xi \Phi \equiv \Phi_{,\mu}\xi^\mu, \tag{9.3}$$

$$\mathcal{L}_\xi A^\mu \equiv A^\mu{}_{,\nu}\xi^\nu - \xi^\mu{}_{,\nu}A^\nu = A^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu - \xi^\mu{}_{;\nu}A^\nu = [\xi, A]^\mu \tag{9.4}$$

である．ここでコンマ(,)は偏微分を，セミコロン(;)は共変微分を表す．一般のテンソル $T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma}$ に対しては

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma} \equiv\ & T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma;\lambda}\xi^\lambda - T^{\lambda\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma}\xi^\mu{}_{;\lambda} - T^{\mu\lambda\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma}\xi^\nu{}_{;\lambda} \cdots \\ & - T^{\mu\nu\cdots\lambda}{}_{\alpha\beta\cdots\gamma}\xi^\rho{}_{;\lambda} + T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\lambda\beta\cdots\gamma}\xi^\lambda{}_{;\alpha} + T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\lambda\cdots\gamma}\xi^\lambda{}_{;\beta} \cdots \\ & + T^{\mu\nu\cdots\rho}{}_{\alpha\beta\cdots\lambda}\xi^\lambda{}_{;\gamma}\end{aligned} \tag{9.5}$$

のように表される．

このリー微分はある方向へのベクトルやテンソルの変化量を与えるので，時空の対称性を定義するのにちょうどよい．ある時空（リーマン空間）がある方向に対称性を持つということは，その方向に時空構造が変化しないということ

である．リーマン空間は計量で定義されるので，その方向に計量が不変であれば時空はその方向に対称であると言える．そこで，計量 $g_{\mu\nu}$ のベクトル ξ に関するリー微分がゼロであれば，つまり，ベクトル ξ が

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{9.6}$$

を満たせば，時空は ξ 方向に対称であると言える．

この方程式 (9.4) をキリング方程式と呼び，ξ をキリングベクトルと呼ぶ．このキリングベクトルで生成される変換は世界間隔 ds^2 を不変にする等長変換である．ある時空に対称性があるかどうかを判断するには，時空に等長変換があるかないか，つまりこのキリングベクトルの存在を見ればよい．

あるキリングベクトルに対し，座標系をうまく選ぶとある座標 x^K に対し $\xi^\mu{}_{(K)} = \delta^\mu{}_K$ と取ることができる．その場合，$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,K} = 0$ であるので計量 $g_{\mu\nu}$ は座標 x^K に依存しなくなる．それは直感に合った座標系ということになる．

9.2 最大対称空間

キリングベクトルの存在が時空の対称性を保証するので，独立なキリングベクトルの数が時空がどの程度の対称性を持つかを表している．キリングベクトルの数が多いほど対称性の高い空間（時空）ということである．では最大何個のキリングベクトルが存在し得るのであろうか？

今空間の次元を D として，その数を求めてみよう．ベクトル ξ の 2 階微分はリーマン曲率を用いて次のように表される．

$$\xi_{\mu;\nu;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\xi_\lambda. \tag{9.7}$$

この式 (9.7) は，リーマン曲率の対称性を使うと

$$\xi_{\mu;\nu;\rho} = R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\xi_\lambda \tag{9.8}$$

と書き換えられる．これは ξ に関する 2 階微分方程式であるから，ある点（初期点）での ξ_μ と 1 階微分 $\xi_{\mu;\nu}$ の値を与えれば解は一意的に決定される．それで独立な初期値の数を数えれば，独立なキリングベクトルの最大数がわかる．ξ_μ の独立な数は D 次元なので D，$\xi_{\mu;\nu}$ の独立な数は，キリング方程式 (9.6) を考慮すると 2 階の反対称テンソルと同じで，$D(D-1)/2$ である．合計 $D(D+1)/2$ 個の独立な初期値が設定可能である．つまり最大 $D(D+1)/2$ 個のキリングベクトルが存在し得るのである．

可能な最大数のキリングベクトルの存在する最も対称性の高い空間を最大対称空間と呼ぶ．例えば，3 次元ユークリッド空間は最大対称空間の一つであるが，実際，並進対称性 (3)，回転対称性 (3) の 6 つのキリングベクトルが存在する．この最大対称空間は一様かつ等方であるので，各点における曲率も等しく

なる．つまり等曲率空間で，スカラー曲率 R の符号によって3つに分類される．ゼロ曲率，正曲率，負曲率の3つである．第6章で宇宙論を議論したときには，宇宙原理を前提とし，3次元空間としてこの最大対称空間を考え，平坦な宇宙，閉じた宇宙，開いた宇宙の3つがあると言った．

宇宙論だけでなく，第8章でブラックホールの概念を導入したときも，簡単のため最も対称性の高い漸近的平坦な非自明解として静的球対称時空を考えた．以下では，より現実的な系を考えるためにもう少し対称性の低い時空解について考察していこう．

9.3 一様空間とビアンキ分類

宇宙が一様・等方であるとした宇宙原理を前提とするビッグバン宇宙論は現在，観測的にも正しいものであることはわかっている．しかしながら宇宙原理が厳密に成立しない場合，その宇宙を過去に遡っていくと，過去の宇宙では一様・等方性が成り立っていないかもしれない．フリードマン宇宙モデルが厳密に正しいものであるかどうかを確かめる意味でも，それを含むより一般的な宇宙モデルを研究することが重要となる．

そのような研究で比較的解析が簡単になるのが空間的に一様な時空である．この節ではそのような時空について考えてみよう．

そのためにはまず一様空間について考える．3次元一様空間は1897年にビアンキ（L. Bianchi）によって9つのタイプに分類されることが示されている．3次元一様・等方空間には6つのキリングベクトルがあるのに対し，3次元一様空間では並進に対応する3つのキリングベクトルだけが存在する．その3つを $\xi_{\hat{k}}$ $(k=1,2,3)$ とすると，それらを生成元とする等長変換群 G が考えられる．生成元はリー代数を構成し，その性質は交換関係

$$[\xi_{\hat{i}},\xi_{\hat{j}}]=C^{\hat{k}}{}_{\hat{i}\hat{j}}\xi_{\hat{k}} \tag{9.9}$$

によって決定される．ここで，定数 $C^{\hat{k}}{}_{\hat{i}\hat{j}}$ を構造定数と呼ぶ．ビアンキが行ったのは，この構造定数 $C^{\hat{k}}{}_{\hat{i}\hat{j}}$ を用いた一様空間の分類である．

等長変換群 G を持つ4次元多様体 $\mathcal{M}$ を記述するには，G によって生成される3次元不変超曲面を導入するのが簡単である．そのような時空は，具体的には不変超曲面である3次元一様空間の時間発展という形で記述される．その3次元不変超曲面は3つの不変基底を用いて表される．ここで不変基底というのは基底ベクトル $X_{\hat{k}}$ $(k=1,2,3)$ が変換群 G の下で不変であるものを言う．つまり $\mathcal{L}_{\xi_{\hat{k}}}X_{\hat{i}}=[\xi_{\hat{k}},X_{\hat{i}}]=0$ である．不変基底は交換関係 $[X_{\hat{i}},X_{\hat{j}}]=-C^{\hat{k}}{}_{\hat{i}\hat{j}}X_{\hat{k}}$ を満たすように選ぶ．

構造定数の分類を，文献3,4) にしたがって以下に示そう．まず構造定数 $C^{\hat{k}}{}_{\hat{i}\hat{j}}$ を

表 9.1　構造定数によるビアンキ分類．3 次元一様空間はタイプ I〜IX に分類される．クラス A はすべて $a=0$．

クラス A	m_1	m_2	m_3	クラス B	m_1	m_2	m_3	a
I	0	0	0	III	0	−1	1	1
II	1	0	0	IV	0	0	1	1
VI_0	0	−1	1	V	0	0	0	1
VII_0	0	1	1	$\mathrm{VI}_{h\neq 0,-1}$	0	−1	1	$\sqrt{-h}$
VIII	−1	1	1	$\mathrm{VII}_{h\neq 0}$	0	1	1	$\sqrt{h}$
IX	1	1	1					

$$C^{\hat{k}}_{\ \hat{i}\hat{j}} = m^{\hat{k}\hat{l}}\epsilon_{\hat{l}\hat{i}\hat{j}} + a_{\hat{i}}\delta^{\hat{k}}_{\ \hat{j}} - a_{\hat{j}}\delta^{\hat{k}}_{\ \hat{i}} \tag{9.10}$$

と分解する．ここで $m^{\hat{k}\hat{l}} = \frac{1}{4}(C^{\hat{k}}_{\ \hat{i}\hat{j}}\epsilon^{\hat{l}\hat{i}\hat{j}} + C^{\hat{l}}_{\ \hat{i}\hat{j}}\epsilon^{\hat{k}\hat{i}\hat{j}})$ は対称行列，$a_{\hat{k}} = \frac{1}{2}C^{\hat{l}}_{\ \hat{l}\hat{k}}$ はベクトルである．ここでヤコビ恒等式 $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ を用いると，$m^{\hat{k}\hat{l}}a_{\hat{l}}=0$ であることを示すことができる．

リー代数の構造定数は，その基底の 1 次変換によって値を変えるので，その変換に関しては同じものと見なさなければならない．つまりその変換に関する同値類で分類すればよいことがわかる．具体的には，基底の回転によって $m^{\hat{k}\hat{l}} = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3)$ のように対角化し，$a_{\hat{i}} = (a, 0, 0)$ のように 1 成分で記述して分類を行えばよい．ここで，基底の再規格化を用い m_1, m_2, m_3 を 0 または ± 1, $a = \sqrt{hm_2m_3}$ のようにおく（h は実数）．

これにより 3 次元リー代数は表 9.1 のようにまず，クラス A 型（$a=0$）とクラス B 型（$a\neq 0$）に分けられ，全体としては I〜IX の 9 つのタイプに分類される．

また不変基底 $X_{\hat{k}}$ の不変双対基底 $\omega^{\hat{k}}$ は表 9.2 のように与えられる．

9.4　ビアンキ宇宙モデル

前節の結果を宇宙論に応用すると，一様・非等方宇宙のダイナミクスが議論できる．なお，一様・等方性を仮定したフリードマン宇宙モデルはその一部として含まれる．実際，曲率ゼロ，負，正の一様・等方宇宙モデルはそれぞれビアンキタイプ I, V, IX の特別なケースである．

一様宇宙の計量は表 9.2 の 3 次元双対不変基底 $\omega^{\hat{i}}$ を用いると次のように書くことができる．

$$ds^2 = -dt^2 + R_0^2 e^{-2\Omega(t)} e^{2\beta_{ij}(t)}\omega^{\hat{i}}\omega^{\hat{j}}\,. \tag{9.11}$$

ここで R_0 はスケールを表す定数である．$\omega^{\hat{i}}$ は

$$d\omega^{\hat{k}} = \frac{1}{2}C^{\hat{k}}_{\ \hat{i}\hat{j}}\omega^{\hat{i}}\wedge\omega^{\hat{j}} \tag{9.12}$$

表 9.2　ビアンキ分類とその不変双対基底.

ビアンキタイプ	$\omega^{\hat{k}}$ $(k=1,2,3)$
I	$\omega^{\hat{k}}=dx^k$
II	$\omega^{\hat{1}}=dx^2-x^1dx^3,\ \omega^{\hat{2}}=dx^3,\ \omega^{\hat{3}}=dx^1$
III	$\omega^{\hat{1}}=e^{-x^1}dx^2,\ \omega^{\hat{2}}=dx^3,\ \omega^{\hat{3}}=dx^1$
IV	$\omega^{\hat{1}}=e^{-x^1}dx^2-x^1e^{-x^1}dx^3,\ \omega^{\hat{2}}=e^{-x^1}dx^3,\ \omega^{\hat{3}}=dx^1$
V	$\omega^{\hat{1}}=e^{-x^1}dx^2,\ \omega^{\hat{2}}=e^{-x^1}dx^3,\ \omega^{\hat{3}}=dx^1$
VI	$\omega^{\hat{1}}=e^{-x^1}dx^2,\ \omega^{\hat{2}}=e^{-hx^1}dx^3,\ \omega^{\hat{3}}=dx^1$
VII	$\omega^{\hat{1}}=(C-\frac{h}{2}D)dx^2-Ddx^3,\ \omega^{\hat{2}}=Ddx^2+(C+\frac{h}{2}D)dx^3,\ \omega^{\hat{3}}=dx^1$ $C\equiv e^{-hx^1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{4-h^2}}{2}x^1\right),\ D\equiv-\frac{2}{\sqrt{4-h^2}}e^{-hx^1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{4-h^2}}{2}x^1\right)$
VIII	$\omega^{\hat{1}}=dx^1+(1+(x^1)^2)dx^2+(x^1-x^2-(x^1)^2x^2)dx^3,$ $\omega^{\hat{2}}=2x^1dx^2+(1-2x^1x^2)dx^3,$ $\omega^{\hat{3}}=dx^1+(-1+(x^1)^2)dx^2+(x^1+x^2-(x^1)^2x^2)dx^3$
IX	$\omega^{\hat{1}}=-\sin x^3dx^1+\sin x^1\cos x^3dx^2,\ \omega^{\hat{2}}=\cos x^3dx^1+\sin x^1\sin x^3dx^2,$ $\omega^{\hat{3}}=\cos x^1dx^2+dx^3$

の関係がある．この宇宙の進化は 2 つの変数 $\Omega(t)$ と $\beta_{ij}(t)$ のダイナミクスによって記述される．スカラー関数 Ω は宇宙のスケールファクターに対応し $(R(t)=R_0e^{-\Omega})$，トレースゼロ 3×3 行列 (β_{ij}) は等方性からのずれを表している．これらは時間のみの関数なので，アインシュタイン方程式は常微分方程式で表される．

簡単のために $\beta_{ij}(t)$ が対角化可能な場合を議論する．クラス A に対しては，真空のアインシュタイン方程式を考えると常に対角化可能であることが示されている．このとき

$$(\beta_{ij})=\begin{pmatrix}\beta_++\sqrt{3}\beta_- & 0 & 0\\ 0 & \beta_+-\sqrt{3}\beta_- & 0\\ 0 & 0 & -2\beta_+\end{pmatrix} \tag{9.13}$$

とおくと，重力の作用は

$$S=\int d\Omega\left[p_+\frac{d\beta_+}{d\Omega}+p_-\frac{d\beta_-}{d\Omega}-\mathcal{H}\right] \tag{9.14}$$

と表される．ここで p_+,p_- は β_+,β_- に共役な運動量で，時間 t の代わりに Ω を変数としてダイナミクスを考える．この場合 Ω が増える方向は体積が小さくなるので，膨張宇宙では Ω が減少する方向が未来の方向に対応する．$\mathcal{H}$ はこの系のハミルトニアンを表しており，

$$\mathcal{H}=p_+^2+p_-^2-24\pi^2\,\overset{(3)}{g}\overset{(3)}{R} \tag{9.15}$$

で与えられる．$\overset{(3)}{g}$ と $\overset{(3)}{R}$ は 3 次元計量の行列式と 3 次元スカラー曲率で，ポテンシャルは

表 9.3 ビアンキ宇宙モデルにおけるポテンシャル $V(\beta_+, \beta_-)$.

ビアンキタイプ	$V(\beta_+, \beta_-)$
I	0
II	$1+\frac{1}{3}e^{4(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}$
III	$1+\frac{4}{3}e^{4\beta_+}$
IV	$1+\frac{1}{2}e^{4\beta_+}\left[8+\frac{2}{3}e^{4\sqrt{3}\beta_-}\right]$
V	$1+4e^{4\beta_+}$
VI	$1+\frac{4}{3}\left[1+h+h^2\right]e^{4\beta_+}$
VII	$1+\frac{2}{3}e^{4\beta_+}\left[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-)+2h^2-1\right]$
VIII	$1+\frac{2}{3}e^{4\beta_+}\left[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-)-1\right] + \frac{1}{3}e^{-8\beta_+}+\frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)$
IX	$1+\frac{2}{3}e^{4\beta_+}\left[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-)-1\right] + \frac{1}{3}e^{-8\beta_+}-\frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)$

$$-24\pi^2 \overset{(3)}{g}\overset{(3)}{R} = 24\pi^2 R_0^4 e^{-4\Omega}\left[V(\beta_+, \beta_-)-1\right] \tag{9.16}$$

で与えられる．$V(\beta_+, \beta_-)$ は各ビアンキタイプによって異なったポテンシャル関数になる（表 9.3 参照）．

この定式化によって，宇宙の進化は，非等方性を表す変数 $\beta_\pm(\Omega)$ の時間（Ω）発展を調べる問題になる．つまりポテンシャル (9.16) の中の 2 次元粒子の軌道を解く問題に帰着される．このようにして非等方宇宙を解析するアプローチをビアンキ宇宙論（またはハミルトニアン宇宙論）と呼ぶ．

各瞬間のポテンシャルの等高線は $V(\beta_+, \beta_-)$ で決定される．それが $e^{-4\Omega}$ の振幅で時間的に変化すると考えればよい．ポテンシャル $V(\beta_+, \beta_-)$ は β_+, β_- の指数関数で表されているので，ある方向にはポテンシャルが急激に大きくなる．

このポテンシャル中の「粒子」にはちょうどそこに壁があるように見える．一方，ポテンシャルの壁から少し離れるとほとんどポテンシャルはゼロである．その結果，「粒子」は壁から離れているときは自由粒子のように振る舞い，壁に近づくと急にポテンシャル障壁を感じ，そこで跳ね返される．ちょうどビリヤードの玉のような運動をする．図 9.1 にはそのビリヤード台の端に対応するポテンシャル障壁の位置が示されている．

このビアンキ宇宙モデルは，宇宙初期のダイナミクスを取り扱うのによく用いられる．現在の宇宙は一様・等方なフリードマン宇宙モデルで非常によく記述できる．しかしながらそれは初期に宇宙の特異点を含む．特異点はそこで理論が破綻することを意味しており，宇宙は一般相対性理論では表せない状態からいきなり始まったことになる．そのような理論的困難の回避可能性を探るため，一様・等方性の条件をゆるめることで宇宙の初期特異点が解消されないかどうか調べられた．そのときにこのビアンキ宇宙論的アプローチおよびその一

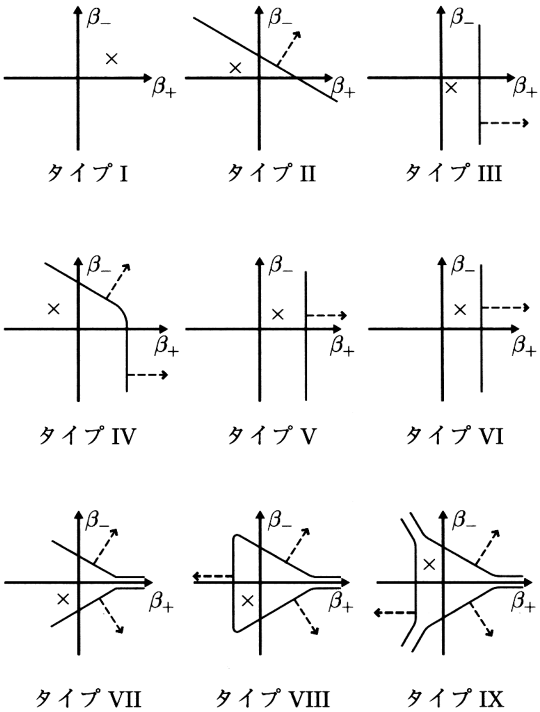


図 9.1 ビアンキ宇宙モデルにおけるポテンシャル障壁．一様宇宙のダイナミクスは，2 次元空間中を運動する「粒子」の位置 (β_+, β_-) を解析することと等価になる．実線がそのポテンシャルの壁の位置で，矢印（点線）の方向にポテンシャルが指数関数的に増大する．「粒子」は壁に「衝突」するとそこで跳ね返される．× はある瞬間の宇宙の状態（「粒子」の位置）を表す．

般化が用いられた[5]．

また宇宙の一様・等方性を理解するため，初期に存在したかもしれない非等方性の消滅機構の研究がビアンキタイプ IX を使って議論されている．これはミックスマスター宇宙論として知られており，タイプ I における非等方性の単純な減少効果だけでなく，各方向の混合がカオス的に起こるのでより効率的であると考えられた[6]．しかし現代ではインフレーション理論が非一様・非等方性減少に重要な役割をすると考えられている．

また，この一様・非等方宇宙モデルは宇宙初期を量子論的に取り扱う量子宇宙論において用いられるミニ超空間を与える．さらに，特異点付近の宇宙のカオス的振舞いの解析などにもこのビアンキ宇宙モデルは用いられる．これらの話題は別のところで取り上げることにしよう．

参考文献

1) L. Bianchi, *Mem. Soc. It. Della. Sc. (Dei. XL)* (3) **11** (1897) 267.
2) M.P. Ryan, Jr. and L.C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton Univ. Press, 1975).
3) G.F.R. Ellis and M.A.H. MacCallum, *Comm. Math. Phys.* **12** (1969) 108.

4) D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and H. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge Univ. Press, 1980) p.93.
5) V. Belinskii, I.M. Khalatnikov, and E.M. Lifshitz, *Adv. in Phys.* **19** (1970) 525.
6) C.W. Misner, *Phys. Rev. Lett.* **22** (1969) 1071.

第 10 章
軸対称定常時空と逆散乱法

アインシュタイン方程式は非線形偏微分方程式で，一般的に非自明な解を見つけることは非常に難しい．しかしながら 2 つの可換なキリングベクトルを持つ時空に対してはソリトン物理学で現れるベックルンド変換や逆散乱法を用いて新しい解の構成が可能になる．この章では軸対称時空を中心に解の構成法について述べよう．

10.1　2 つの対称性とエルンスト方程式

時空の対称性を課さないと非線形偏微分方程式を解くのは難しいと述べた（第 9 章）．球対称真空解は，漸近的平坦性を仮定すると解析的に解け，一意的にシュヴァルツシルト解になる．しかし自然界に存在する天体を記述するには「球対称性」は条件として強すぎるであろう．実際，多くの天体は回転している．回転を伴う天体の周りの時空で最も対称性の高いものは，軸対称定常時空であろう．ここではそれについて考察しよう[1]．

時間的に変化しない「定常性」と回転軸の周りの「軸対称性」の 2 つの対称性を仮定すると，時空には 2 つのキリングベクトルが存在する．その計量は

$$ds^2 = -f\left(dt - \omega d\varphi\right)^2 + f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\varphi^2\right] \tag{10.1}$$

で与えられる．ここで f, γ, ω は ρ, z の関数である．このときアインシュタイン方程式の一部は

$$\left(f^2\rho^{-1}\omega_{,\rho}\right)_{,\rho} + \left(f^2\rho^{-1}\omega_{,z}\right)_{,z} = 0 \tag{10.2}$$

と表される．ここでコンマ（,）は偏微分を表す．この式は

$$\psi_{,\rho} = f^2\rho^{-1}\omega_{,z}\ , \quad \psi_{,z} = -f^2\rho^{-1}\omega_{,\rho} \tag{10.3}$$

を満たす関数 ψ（ツイストポテンシャル）が存在することを保証する．この ψ

と計量 f をまとめ，複素変数 $\mathcal{E} = f + i\psi$（エルンストポテンシャル）を導入すると，残りのアインシュタイン方程式は

$$\mathcal{E}_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\mathcal{E}_{,\rho} + \mathcal{E}_{,zz} = \frac{1}{\mathcal{E} + \mathcal{E}^*}\left[(\mathcal{E}_{,\rho})^2 + (\mathcal{E}_{,z})^2\right], \tag{10.4}$$

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho}{(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*)^2}\left[\mathcal{E}_{,\rho}\mathcal{E}^*_{,\rho} - \mathcal{E}_{,z}\mathcal{E}^*_{,z}\right], \quad \gamma_{,z} = \frac{\rho}{(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*)^2}\left[\mathcal{E}_{,\rho}\mathcal{E}^*_{,z} + \mathcal{E}^*_{,\rho}\mathcal{E}_{,z}\right] \tag{10.5}$$

となる．ここで $*$ は複素共役を表す．(10.4) 式は複素変数 $\mathcal{E}$ の非線形偏微分方程式である．この式をエルンスト方程式と呼ぶ．エルンスト（F.J. Ernst）は複雑なアインシュタイン方程式を 1 複素変数 $\mathcal{E}$ だけの閉じた方程式に帰着させたのである[2]．γ は $\mathcal{E}$ を求めた後に (10.5) 式を用いて決定すればよい．エルンストは $\xi \equiv (1-\mathcal{E})/(1+\mathcal{E})$ によって定義される複素変数 ξ も用いた．これもエルンストポテンシャルと呼ばれ，それの満たす方程式

$$(\xi\xi^* - 1)\left[\xi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\xi_{,\rho} + \xi_{,zz}\right] = 2\xi^*\left[(\xi_{,\rho})^2 + (\xi_{,z})^2\right] \tag{10.6}$$

もエルンスト方程式と呼ばれる．1 変数で閉じたこの方程式は，複雑なアインシュタイン方程式を解くときに有効な方法を与える．実際，富松・佐藤解はこの方程式を解いて発見された[3]．

10.2 軸対称定常時空解

ここで少しこれまでに見つかっている漸近的平坦な定常時空解についておさらいしておこう．シュヴァルツシルト解の発見のすぐ後に，電場を伴う球対称静的解としてライスナー（H. Reissner）とノルドシュトルム（G. Nordstrøm）が帯電ブラックホール解（ライスナー・ノルドシュトルム解）を与えている[4]．また，ワイル（H. Weyl）は 1917 年に軸対称静的真空解であるワイル解を見つけている[5]．それからかなり後の 1963 年に，回転しているブラックホール解（カー解）がカー（R.P. Kerr）によって発見された[6]．その後すぐに，回転している帯電ブラックホール解（カー・ニューマン解）がニューマン（E.T. Newman）たちによって与えられた[7]．

これらの解が今考えているエルンストポテンシャルでどう表されるかを見てみよう．簡単のため真空解のみを考える．軸対称静的な場合は，回転がないので，$\omega = 0$ つまり $\psi = 0$ である．エルンストポテンシャルは実数関数 f となり，$f = e^{2u}$ とおくと，u は $\Delta u = 0$ を満たす調和関数となる．ここで，Δ は 3 次元ユークリッド空間のラプラス演算子である．この u の方程式は線形で，解くのが簡単なだけでなく，解の重ね合わせが可能であるという点で重要である．

ここで次の座標変換で定義される（扁平）楕円体座標 (x, y) を導入しよう[8]．

$$\rho = \ell(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}, \quad z = \ell xy. \tag{10.7}$$

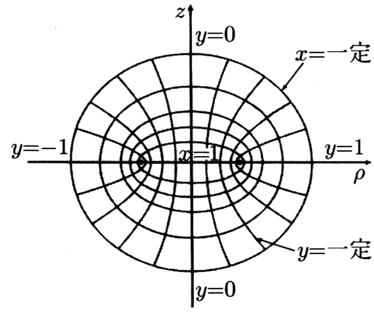


図 10.1　楕円体座標の等高線．x=一定および y=一定の等高線がそれぞれ同じ焦点の楕円および双曲線になる．

ℓ は長さの次元を持った定数で，2 つの座標系の関係は

$$d\rho^2 + dz^2 = \ell^2(x^2 - y^2)\left[(x^2-1)^{-1}dx^2 + (1-y^2)^{-1}dy^2\right] \tag{10.8}$$

で与えられる（図 10.1 参照）．

この座標系を用いた特殊解として u が x のみに依存する解を考えると，

$$f = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\delta}, \quad e^{2\gamma} = \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)^{\delta^2} \tag{10.9}$$

が得られる[8,9]．δ は積分定数で，$\delta = 1$ がこの座標系でのシュヴァルツシルト解になる．これは，$x = r/M - 1$, $y = \cos\theta$, $\ell = M$ とおくことで確かめられる．M は重力質量である．もとの円筒座標 (ρ, z) を用いるとこのシュヴァルツシルト解は

$$u = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{r_+ + r_- - 2M}{r_+ + r_- + 2M}\right], \quad \gamma = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(r_+ + r_-)^2 - 4M^2}{4r_+r_-}\right] \tag{10.10}$$

で表される．ここで $r_\pm^2 \equiv \rho^2 + (z \pm M)^2$ である．u が重ね合わせ可能であることを考慮すると，シュヴァルツシルトブラックホールを z 軸上に複数個並べたような時空解もこの解 (10.10) から構成できる[10]．

$\delta \neq 1$ の場合，$x = r/M - 1$, $y = \cos\theta$, $\ell = M/\delta$ とおくと，解の $r \to \infty$ の漸近的な振舞いからニュートンポテンシャル

$$\phi_{\rm N} \approx \frac{1-f}{2} \approx -\frac{M}{r} + \frac{MQ}{r^3}P_2(\cos\theta) + \cdots \tag{10.11}$$

が得られる（$P_2(x)$ は 2 次のルジャンドル多項式）．ここで $Q \equiv [(\delta^2 - 1)/(3\delta^2)]M^3$ は重力源の 4 重極モーメントである．このことから $\delta \neq 1$ の解は楕円体の重力源がつくる時空解を表していることがわかる（$\delta > 1$ が扁平楕円体，$\delta < 1$ が扁長楕円体に対応している）．この解の特異点の周りには事象の地平線が存在せず，裸の特異点を持った時空解になっている．

この楕円体座標を用いると，カー解のエルンストポテンシャルは

$$\xi = (px - iqy)^{-1} \quad (p^2 + q^2 = 1,\ p, q : \text{定数}) \tag{10.12}$$

表 10.1　富松・佐藤解[3]．δ, q はそれぞれ重力源の変形の度合いおよび回転を表すパラメータ ($p^2+q^2=1$)．$\delta=1$ はカー解．

δ	α	β
1	$px-iqy$	1
2	$p^2(x^4-1)-2ipqxy(x^2-y^2)-q^2(1-y^4)$	$2px(x^2-1)-2iqy(1-y^2)$
3	$p(x^2-1)^3(x^3+3x)+iq(1-y^2)^3(y^3+3y)$ $-pq(x^2-y^2)^3\left[q(x^3+3xy^2)+ip(y^3+3x^2y)\right]$	$p^2(x^2-1)^3(3x^2+1)-q^2(1-y^2)^3(3y^2+1)$ $-12ipqxy(x^2-y^2)(x^2-1)(1-y^2)$
$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$

のように非常に簡単になる．これからカー解は

$$f=\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2},\quad e^{2\gamma}=\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}, \tag{10.13}$$

$$\omega=\frac{2Mq}{p^2x^2+q^2y^2-1}(1-y^2)(px+1) \tag{10.14}$$

で表される．ここで $M=\ell/p$ である．$px=r/M-1$, $y=\cos\theta$, $a=Mq$ とおくと，よく知られたボイヤー・リンドクィスト座標を用いたカー解

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\Sigma}\left(dt-a\sin^2\theta d\varphi\right)^2+\Sigma\left(\frac{dr^2}{\Delta}+d\theta^2\right) \\ &\quad +\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[(r^2+a^2)d\varphi-adt\right]^2 \end{aligned} \tag{10.15}$$

が得られる[11]．ここで，$\Delta\equiv r^2-2Mr+a^2$, $\Sigma\equiv r^2+a^2\cos^2\theta$ で，M と $J=Ma$ はそれぞれブラックホールの重力質量および角運動量を表す．

1972 年，富松と佐藤（文）はエルンスト方程式を用いて，ワイル解のように扁平した重力源が回転する軸対称定常真空解を発見した[3]．彼らは，エルンストポテンシャルが，カー解の場合のように，x と y の簡単な有理関数であると仮定し，厳密解を求めた．具体的には $\xi=\beta/\alpha$ (α,β は x,y の多項式）とおいて解を得ている（表 10.1）．この解の表す重力源の重力質量，角運動量および 4 重極モーメントはそれぞれ $M=\ell\delta/p$, $J=M^2q$, $Q=M^3\left[\frac{(\delta^2-1)}{3\delta^2}p^2+q^2\right]$ で与えられる．これらの解もカー解を除いてワイル解同様に裸の特異点を持つ．

10.3　逆散乱法と軸対称定常解の生成

今考えている微分方程式系はある種の内部対称性を持っている．例えば，$\xi\to\xi'=e^{i\alpha}\xi$（エーラース変換）や $\{f,\omega,\psi\}\to\{f',\omega',\psi'\}=\{\rho/f,-i\psi,i\omega\}$（ノイゲバウアー・クレーマー変換）のような変換に対し方程式系は不変である．このような方程式系の不変性は新しい解を構成するのに用いることができる．実際，ハリソン（B.K. Harrison）とノイゲバウアー（G. Neugebauer）は非線形物理学におけるベックルンド変換にあたるものを発見した[12]．既知の解があればそれを「種」にこの変換を繰り返すことでいくらでも新しい解が構成

できる．

一方，ベリンスキー（V.A. Belinski）とサハロフ（V.E. Zakharov）は，2つの可換なキリングベクトルが存在する場合にアインシュタイン方程式を逆散乱法によって解く方法を与えた[13]．対象となるのは面対称（または円筒対称）な時空，または軸対称定常時空である．ここでは後者について解説する[*1]．

まず逆散乱法について説明しよう[15]．逆散乱法というのは，非線形方程式を線形問題に帰着して解く方法である．例えば，$\phi(x,t)$ に対する KdV 方程式

$$\phi_{,t} = 6\phi\phi_{,x} - \phi_{,xxx} \tag{10.16}$$

を，与えられた初期条件 $\phi(x,0) = \phi_0(x)$ に対して解く場合を考えよう．これを解くために次の定常シュレディンガー方程式（固有値方程式）

$$L\psi \equiv \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi(x,t)\right]\psi = \lambda\psi \tag{10.17}$$

を考える．ここでポテンシャルとして KdV 方程式の変数 $\phi(x,t)$ をとる．また，$\psi(x,t)$ は仮想的な波動関数で，そのエネルギー固有値 λ は時間に依存しないとする．さらにこの波動関数 $\psi(x,t)$ の時間発展は

$$\psi_{,t} = B\psi \equiv \left[-4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3\left(\phi\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\phi\right)\right]\psi \tag{10.18}$$

で記述されるとする．このとき，固有値方程式 (10.17) の固有値 λ が時間に依存しないための必要十分条件は L, B が

$$L_{,t} = [B, L] \tag{10.19}$$

を満たすことである．この演算子方程式に上の L, B の定義を代入すると KdV 方程式 (10.16) が得られる．その結果，上の 2 つの線形方程式 (10.17), (10.18) を解けば，そのポテンシャル $\phi(x,t)$ が KdV 方程式の解になっているというわけである．つまり KdV 方程式という非線形方程式を解く問題が線形方程式 (10.17), (10.18) を解く問題に帰着される．このような演算子 L, B の組をラックスペアと呼ぶ．

この線形方程式系を解くには次のようにすればよい．初期条件 $\phi_0(x)$ が与えられていると，初期のポテンシャルがわかっているので，(10.17) 式から初期散乱データ（離散固有値 λ_n，その波動関数の振幅 $c_n(0)$, 連続固有値 λ に対する波の反射係数 $R(\lambda,0)$，透過係数 $T(\lambda,0)$）を完全に求める．これを順問題と呼ぶ．この散乱データの時間発展を (10.18) 式を用いて決定する．つまり任意の時刻 t での $c_n(t)$, $R(\lambda,t)$, $T(\lambda,t)$ を決める．この散乱データから逆にその時刻でのポテンシャル $\phi(x,t)$ を再構成する．これを逆問題と呼ぶ．そしてそのとき得られた $\phi(x,t)$ が KdV 方程式の解となる．このようにして非線形方程式を線形問題として解く方法を逆散乱法と呼ぶ．この方法が使えるかどうかは与

*1）　この逆散乱法のうち後に示すソリトンを用いる方法はベックルンド変換によるものと等価であることが示されている[14]．

えられた微分方程式に対応するラックスペア $\{L, B\}$ を見つけられるかどうかである．

この方法は，また 2 階微分方程式系や多成分系に拡張可能である[15]．その場合は上の方程式系 (10.17), (10.18) に代わる

$$\psi_{,x} = U(\lambda, x, t)\psi\,, \quad \psi_{,t} = V(\lambda, x, t)\psi \tag{10.20}$$

の 2 つの線形方程式系を考える．ここで $\psi(\lambda, x, t)$ は多成分波動関数で，U, V は，先ほどの固有値 λ に対応するパラメータを含む行列である．但し λ は一般的にはエネルギーとしての意味はなくなり，スペクトルパラメータと呼ばれる．2 つの方程式 (10.20) に従う ψ が可積分であるという条件から

$$U_{,t} - V_{,x} + UV - VU = 0 \tag{10.21}$$

が得られる．この式は固有値 λ を含むが，それが任意の λ に対して成り立つ必要がある．その条件が解くべき非線形方程式になっていれば，その非線形方程式を解く問題を線形方程式系 (10.20) を解く問題に帰着できる．このような演算子 U, V を見つけることができるかが問題を解く鍵になる．先ほどの KdV 方程式を例に取ると，

$$\begin{aligned} U &= i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi & 0 \end{pmatrix}\,, \\ V &= 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ \phi_{,x} & -\phi \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\phi_{,x} & 2\phi \\ 2\phi^2 - \phi_{,xx} & \phi_{,x} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.22}$$

とおけば，(10.21) と KdV 方程式が等価であることがわかる．この場合，$\psi = (\psi_1, \psi_2)$ とおくと，(10.20) 式から，ψ_1 に対する方程式は (10.17), (10.18) に一致する．

KdV 方程式のような可積分系ではソリトンと呼ばれる特別な解析解が存在する．このソリトンは逆散乱法においては無反射ポテンシャル（反射係数 $R(\lambda, t) = 0$）の場合に対応している．この場合，離散固有値 λ_n は透過係数 $T(\lambda, t)$ の 1 価の極に一致し，複素 λ 平面でその極の位置を与えれば，散乱データが完全に決まり，解も得られる．

もしこのソリトン解にのみ興味がある場合には順問題や逆問題を直接解く必要はなく，既知の解から変換によって新しい解を得ることができる．以下に述べる軸対称定常時空解の構成法の中でその具体例を見ることにしよう．

ベリンスキーとサハロフはアインシュタイン方程式の一部の方程式系に対するラックスペアを見つけ，厳密解を次々と構成する方法を与えた[13]．今計量を

$$ds^2 = F\eta_{AB}d\xi^A d\xi^B + g_{ab}dx^a dx^b \tag{10.23}$$

と表そう．ここで，4 つの座標 $\{x^\mu\}$ を 2 つの組に分けそれぞれを $\{\xi^A\}$, $\{x^a\}$

で表す．このとき2つのキリングベクトルを $\{\partial/\partial x^a\}$ とすれば，計量は ξ^A のみに依存し，$F = F(\xi^A)$, $g_{ab} = g_{ab}(\xi^A)$ と表される．また，$\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1, \epsilon)$ $(\epsilon = \pm 1)$ とおく．

アインシュタイン方程式 $R^a{}_b = 0$ は $\eta^{AB}\left(\alpha g_{,A} g^{-1}\right)_{,B} = 0$, $(\alpha^2 \equiv -\epsilon \det g)$ で与えられる．ここで $g = (g_{ab})$ は 2×2 行列で，g^{-1} はその逆行列である．$\epsilon = -1$ の場合，2つのキリングベクトルは空間的で，時間変化する面対称または円筒対称な時空を表す．一方 $\epsilon = 1$ の場合は，時間的および空間的なキリングベクトルが1つずつ存在し，軸対称定常時空に対応する．ここでは後者の場合を考えることにしよう．

$\xi^A = (\rho, z)$, $x^a = (t, \varphi)$ と表し，

$$\det g = -\rho^2 \tag{10.24}$$

となるように座標系を定めると，解くべきアインシュタイン方程式は

$$U_{,\rho} + V_{,z} = 0\,, \tag{10.25}$$

$$(\ln F)_{,\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\mathrm{tr}\left(U^2 - V^2\right), \quad (\ln F)_{,z} = \frac{1}{2\rho}\mathrm{tr}\,(UV) \tag{10.26}$$

となる．ここで $U \equiv \rho g_{,\rho} g^{-1}$, $V \equiv \rho g_{,z} g^{-1}$ である．(10.25) は行列 g に対して閉じた非線形偏微分方程式で，それを解くのに逆散乱法を用いる．得られた g を用いて (10.26) から F を求める．

g の解を逆散乱法で求めるため，「波動関数」ψ の方程式系として

$$D_1\psi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2}\psi, \quad D_2\psi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2}\psi \tag{10.27}$$

を考える．ここで微分演算子 D_1, D_2 は

$$D_1 \equiv \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \rho^2}\partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2}\partial_\lambda \tag{10.28}$$

で定義される．D_1, D_2 は交換可能であるので，(10.27) 式から導かれる ψ の可積分条件は U, V に条件を課す．それがアインシュタイン方程式 (10.25) と等価になる．その結果，(10.27) 式を満たす $\psi(\lambda, \rho, z)$ を求めれば，$g(\rho, z) = \psi(0, \rho, z)$ がアインシュタイン方程式の解 g を与えることになる（U, V の定義参照）．

この方程式 (10.27) の解を求めるのに，既知の解からの変換を用いる．つまり既知の解 g_0 から求められた (10.27) 式の解を ψ_0 としたとき，変換 $\psi = \chi(\lambda)\psi_0$ によって新しい解を構成しよう．変換式を (10.27) に代入すると変換行列 χ に対する方程式

$$\begin{aligned} D_1\chi &= \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2}\chi - \chi\frac{\rho V_0 - \lambda U_0}{\lambda^2 + \rho^2}\,, \\ D_2\chi &= \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2}\chi - \chi\frac{\rho U_0 + \lambda V_0}{\lambda^2 + \rho^2} \end{aligned} \tag{10.29}$$

を得る．g が実行列であることから $\chi^*(\lambda^*) = \chi(\lambda)$, $\psi^*(\lambda^*) = \psi(\lambda)$ を満たす必要がある．また g が対称行列であることから補足条件 $g = \chi(\lambda) g_0{}^t\chi(-\rho^2/\lambda)$

が課される．この条件式と χ の定義から $\chi(\infty)=I$ が導かれる．

この変換行列 χ を求めればいいのであるが，ソリトンは，逆散乱法において無反射ポテンシャルの場合になっているのに対応して，この変換行列では複素 λ 平面の極として現れる．そこで N 個のソリトンを付け加えることによって新しい解を構成しよう．その場合，χ の形として

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k} \tag{10.30}$$

とおけばよい．ここで行列 R_k と複素関数 μ_k は ρ, z のみに依存する．この式を (10.29) 式に代入，上の補足条件などを用いると μ_k, R_k が決定される．μ_k の満たすべき方程式は

$$\mu_{k,z} = -\frac{2\mu_k^2}{\mu_k^2+\rho^2}, \quad \mu_{k,\rho} = \frac{2\rho\mu_k}{\mu_k^2+\rho^2} \tag{10.31}$$

となるが，これは 2 次方程式 $\mu_k^2 + 2(z-w_k)\mu_k - \rho^2 = 0$ の解として得られる．ここで w_k は任意の複素数（積分定数）である．この 2 次式から

$$\mu_k = w_k - z \pm \left[(w_k - z)^2 + \rho^2\right]^{1/2} \tag{10.32}$$

の 2 つの解が得られる．また行列 R_k を $(R_k)_{ab} = n_a^{(k)} m_b^{(k)}$ と分解し，(10.29) 式に代入すると $m_b^{(k)}$ の満たすべき式が得られる．一方，上の補足条件を用いると $n_a^{(k)}$ が決まる．具体的には

$$m_a^{(k)} = m_{0b}^{(k)}[\psi_0^{-1}(\mu_k,\rho,z)]_{ba}, \quad n_a^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} D_{lk}\mu_l^{-1} L_a^{(l)} \tag{10.33}$$

で与えられる．ここで $m_{0b}^{(k)}$ は任意定数, D_{km} は $\mathit{\Gamma}_{ml} = m_c^{(k)}(g_0)_{cb} m_b^{(l)}/(\rho^2 + \mu_k\mu_l)$ の逆行列 $(D\mathit{\Gamma} = I)$, $L_a^{(k)} = m_c^{(k)}(g_0)_{ca}$ である．これから新しい解 g は

$$g_{ab} = \chi(0)_{ac}(g_0)_{cb} = (g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^{N} \frac{D_{kl}}{\mu_k\mu_l} L_a^{(k)} L_b^{(l)} \tag{10.34}$$

のように与えられる．

計量が実であるためには，$w_k, m_{0b}^{(k)}$ を実に選ぶか（実の極），複素共役の極の組（$w_{2k+1} = w_{2k}^*, m_{0b}^{(2k+1)} = (m_{0b}^{(2k)})^*$）を考えればよい．しかしながら，ここで得られた解は一般に座標条件 (10.24) を満たさない．実際

$$\det g = (-1)^N \rho^{2N} \left(\prod_{k=1}^{N} \mu_k^{-2}\right) \det g_0 \tag{10.35}$$

となる．これからわかることは，まず N が奇数だと $\det g < 0$ となり非物理的な時空になるので，ソリトン数 N は偶数でなければならない．物理的に正しい座標条件 (10.24) を満たすアインシュタイン方程式 (10.25) の解は，計量の再規格化によって与えることができ，

$$g^{(\mathrm{ph})} = \pm\rho^{-N}\left(\prod_{k=1}^{N}\mu_k\right) g, \quad \det g^{(\mathrm{ph})} = -\rho^2 \tag{10.36}$$

で与えられる．

残された計量 F は，(10.26) を解くと

$$F^{(\mathrm{ph})} = 16C_F F_0 \rho^{-N^2/2} \left(\prod_{k=1}^{N} \mu_k \right)^{N+1} \left[\prod_{k>l=1}^{N} (\mu_k - \mu_l)^{-2} \right] \det \Gamma_{kl} \tag{10.37}$$

となる．ここで C_F は任意定数（但し，$F^{(\mathrm{ph})} > 0$）である．

具体例を見てみよう．ミンコフスキー時空は明らかに軸対称定常真空解であるので，既知の解として使うことができる．ミンコフスキー時空の計量は，円筒座標を用いると $F_0 = 1, g_0 = \mathrm{diag}(-1, \rho^2)$ である．これに対応する ψ_0 は $\psi_0 = \mathrm{diag}(-1, \rho^2 - 2z\lambda - \lambda^2)$ となる．これから

$$\begin{aligned} m_0^{(k)} &= C_0^{(k)}, \quad m_1^{(k)} = C_1^{(k)}/\mu_k, \\ \Gamma_{kl} &= \frac{-C_0^{(k)}C_0^{(l)} + C_1^{(k)}C_1^{(l)}\mu_k^{-1}\mu_l^{-1}\rho^2}{\rho^2 + \mu_k\mu_l}, \\ L_0^{(k)} &= -C_0^{(k)}, \quad L_1^{(k)} = C_1^{(k)}\mu_k^{-1}\rho^2 \end{aligned} \tag{10.38}$$

が得られる．ここで $C_0^{(k)}, C_1^{(k)}$ は任意定数である．

このミンコフスキー時空を「種」として新しい非自明な解を構成しよう．ソリトンの数は偶数でないといけないので，$N = 2$ が最も簡単な場合である．計量の実数条件から μ_1, μ_2 が実の場合と複素共役の 2 つの場合が考えられる．そこで $w_1 = z_1 + \sigma$, $w_2 = z_1 - \sigma$ (σ: 実数または純虚数) とおく．ここで $\rho = [(r-M)^2 - \sigma^2]^{1/2} \sin\theta$, $z = z_1 + (r - M)\cos\theta$ で定義される新しい座標 (r, θ) を導入し，任意定数を

$$\begin{aligned} C_1^{(1)}C_0^{(2)} - C_0^{(1)}C_1^{(2)} &= \sigma, \quad C_1^{(1)}C_0^{(2)} + C_0^{(1)}C_1^{(2)} = -M, \\ C_1^{(1)}C_1^{(2)} - C_0^{(1)}C_0^{(2)} &= -b, \quad C_1^{(1)}C_1^{(2)} + C_0^{(1)}C_0^{(2)} = a \end{aligned} \tag{10.39}$$

とおく．この場合，$\sigma^2 = M^2 - a^2 + b^2$ という関係がある．これらの結果から

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{\Delta}{\Sigma}\left[d\tilde{t} - \left(a\sin^2\theta + 2b\cos\theta\right)d\varphi\right]^2 + \Sigma\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) \\ &+ \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left[(r^2 + a^2 + b^2)d\varphi - a d\tilde{t}\right]^2 \end{aligned} \tag{10.40}$$

という新しい解を得る．ここで $\tilde{t} \equiv t + 2a\varphi$, $\Sigma \equiv r^2 + (b - a\cos\theta)^2$, $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 - b^2$ である．これはカー解 (10.15) を一般化したカー・ナット解である[16]．パラメータ M, a はカー解と同じ意味を持つ．b はナットパラメータと呼ばれ，$a = 0$ の場合タウ・ナット解に一致する[17]．漸近的平坦な時空では $b = 0$ になり，カー解 (10.15) が得られる．

この解からわかることは，σ が実のとき (つまり 2 つの実極の場合)，$M^2 + b^2 > a^2$ となる．この場合，特異点は地平線に隠され，ブラックホール解が得られる．

一方，σ が純虚数のとき（つまり 2 つの複素共役な極の場合），$M^2 + b^2 < a^2$ となり，裸の特異点が現れる．

非常に簡単なミンコフスキー時空から回転ブラックホールを表すカー（・ナット）解が得られることは，この方法の有効性を示している．このように，ベックルンド変換も含め，ソリトン解を求めるのは非常に成功している．しかしながら一般的な解（非ソリトン的解）の導出に対してはこれらの手法がどの程度有効かは今のところよくわかっていない．

参考文献

1) 数理科学：特集「ブラックホールとソリトン」(1983 年 3 月号).
2) F.J. Ernst, *Phys. Rev.* **167** (1968) 1175; *ibid.* **168** (1968) 1415.
3) A. Tomimatsu and H. Sato, *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 1344; *Prog. Theor. Phys.* **50** (1973) 95.
4) H. Reissner, *Ann. Phys.* **50** (1916) 106; G. Nordstrøm, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20** (1918) 1238.
5) H. Weyl, *Ann Phys.* **54** (1917) 117.
6) R.P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237.
7) E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 918.
8) D.M. Zipoy, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 1137.
9) B.H. Voorhees, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 2119.
10) W. Israel and K.A. Khan, *Nuovo Cim.* **33** (1964) 331.
11) R.H. Boyer and R.W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8** (1967) 265.
12) B.K. Harrison, *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 1197, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1695; G. Neugebauer, *J. Phys.* **A12** (1979) L67.
13) V.A. Belinski and V.E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **48** (1978) 985; *ibid.* **50** (1979) 1.
14) C.M. Cosgrove, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 2417; *ibid.* **22** (1981) 2624; *ibid.* **23** (1982) 615.
15) V. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational Solitons* (Cambridge Univ., 2001).
16) C.W. Misner, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 924.
17) A.H. Taub, *Ann. Math.* **53** (1951) 472; E. Newman, L. Tamburino, and T. Unti, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 915.

第 11 章
ブラックホールの時空構造：重力の最も強い世界

一般相対性理論の寵児とも言えるブラックホール．それが事象の地平線という一方通行の境界を持つ強重力の世界であることは第 8 章で述べたが，ここではその時空構造に焦点を当てて解説する．

11.1 ペンローズ時空図

ブラックホールの時空構造を見るのには，前に導入したような事象の地平線で特異にならない座標系を用いるのが都合が良い．また，遠方での構造も同時に表すために無限遠が有限の座標値になるような変換を用いると時空構造全体が見渡せ，その因果構造を調べるのに便利である．例えば，ミンコフスキー時空 $[ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$ は，

$$t \pm r = \tan\frac{\psi \pm \xi}{2} \tag{11.1}$$

$(-\pi \leq \psi \pm \xi \leq \pi,\ \xi \geq 0)$ という変換で，図 11.1 のような三角形の有限領域に写像される．空間的な無限遠は I^0，時間的な無限遠，つまり無限の未来は I^+，無限の過去は I^-，そして光が伝播して行く無限遠（未来のヌル無限遠）は $\mathscr{I}^+$，光が伝播して来る無限遠（過去のヌル無限遠）は $\mathscr{I}^-$ で表されている．このような図をペンローズ時空図と呼ぶ[1)]．この場合，動径方向に進む光の軌道はクルスカル図と同様に ±45° の方向になる．

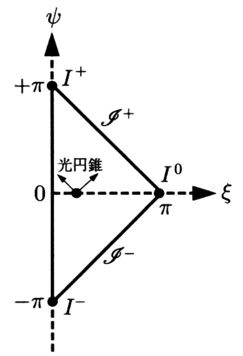


図 11.1　ミンコフスキー時空のペンローズ図．第 8 章のミンコフスキー時空図（図 8.1）を有限領域に縮めたものになっている．

シュヴァルツシルト時空でも，クルスカル・セケレス座標 (v, u) から同様の

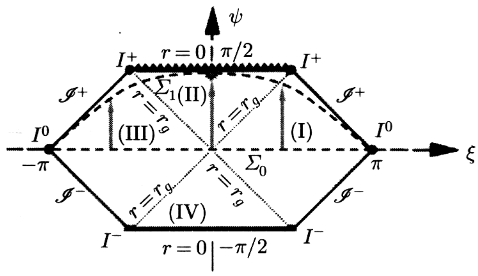


図 11.2 シュヴァルツシルト時空のペンローズ図．領域 (I), (II), (III), (IV) は，第 8 章のクルスカル図（図 8.4, 8.5）のそれぞれの領域に対応している．

座標 (ψ, ξ) への変換

$$v \pm u = \tan \frac{\psi \pm \xi}{2} \tag{11.2}$$

を導入するとそのペンローズ図は図 11.2 のようになる．これはクルスカル図（第 8 章の図 8.4, 8.5）を有限領域に縮めた図になっている．

11.2 曲がった空間の埋め込みとワームホール構造

このシュヴァルツシルト時空には 2 つの漸近的に平坦なミンコフスキー空間が存在すると述べた (第 8 章)．それがどのような構造をしているかを見るには，曲がった空間を視覚的に表現するのがわかりやすい．つまり曲がった空間をより高い次元のユークリッド空間中に埋め込み，その曲がり具合を目に見えるように表現するのである．3 次元空間をより高次元に埋め込むとわかりにくいので，2 次元空間を 3 次元ユークリッド空間 ($ds_E^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$) に埋め込むことにする．ここで (x, y, z) は仮想的な空間の座標である．簡単のため 2 次元空間として空間的超曲面 Σ_0 $(t = 0)$ の赤道面 $(\theta = \pi/2)$ 部分を考える（図 11.2 参照）と，その 2 次元計量は $ds_2^2 = f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2$ $[f(r) \equiv 1 - r_g/r]$ で与えられる．3 次元ユークリッド空間の中に 2 次元軸対称曲面 $z = z(r)$ を考えると，その曲面上の計量は

$$ds_2^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{11.3}$$

と表されるが，これをシュヴァルツシルト解と比較すると，2 次元曲面 $z = z(r)$ の満たすべき方程式 $(dz/dr)^2 + 1 = f(r)^{-1}$ が得られる．これを解くと

$$z = \pm \sqrt{4 r_g (r - r_g)} \tag{11.4}$$

となる．

これは，仮想空間の赤道面（$z = 0$）に対して上下対称な放物線を回転した 2 次元曲面になっており，2 つの漸近的平坦な空間（$r \to \infty$）が細いくびれ（喉）

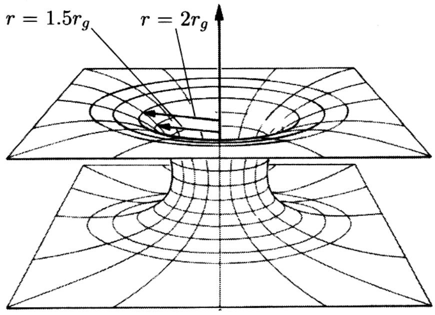


図 11.3　シュヴァルツシルト時空の埋め込み.

の部分を挟んでつながっている[2,3]（図 11.3）. この 2 つの漸近的平坦な空間部分が図 11.2 における領域 (I) および (III) の無限遠点 I^0 近傍に対応している.

ホイラーは, 2 つの世界をつなぐこの喉のような時空構造をワームホール（虫食い穴）と呼んだ*1). くびれの最も細い部分が重力半径 r_g に対応しているが, その両側はどちらも事象の地平線の外部であるので, このような空間があれば, 無限遠から地平線に近づき, ブラックホールに落ち込むことなく, 地平線を越えてもう 1 つの無限遠に抜けることができそうに見える.

しかしながら, このシュヴァルツシルトのワームホールは通過することができない. それは, このワームホールの構造が $t = 0$ のときの空間的超曲面 Σ_0 を表すものであって, 時間が経過するとどんどん変化していくからである. 実際, 図 11.2 で空間的超曲面 $\Sigma(t)$ の時間発展を考えると, 有限時間で中央部が特異点にぶつかり（図 11.2 の超曲面 Σ_1）, 2 つの漸近的平坦な領域は特異点で分断される. ワームホールを通り抜ける前にくびれの部分が特異点につぶれてしまうのである[4].

11.3　カーブラックホール

自然界に存在する天体の多くは回転を伴っている. 当然, ブラックホールも回転しているのが自然だと考えられる. その解は前に導出したようにカー時空解（10.15）で表される.

この時空はシュヴァルツシルト時空より複雑で, 次の 4 つの特徴的な領域を持つ（図 11.4 参照）.

(i) エルゴ領域　**(ii)** 事象の地平線　**(iii)** 内部地平線　**(iv)** 時空特異点

*1)　本当の意味のワームホールは 1 つの宇宙の離れた 2 点間を結ぶ時空の抜け道で定義される. 図 11.3 の 2 つの無限遠を同一視すればそのような時空構造を構成できる[4].

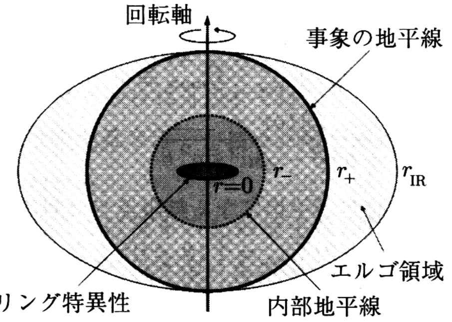


図 11.4 カーブラックホールの断面図．事象の地平線の外側にエルゴ領域が拡がり，内側には内部地平線が，その内側にはリング状の特異点が存在する．

このうち (ii) と (iii) は曲面である*2)．事象の地平線はブラックホールを特徴づける領域の境界で，その半径は $\Delta(r) = 0$ で与えられる．この2次方程式を解くと $r = r_\pm \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ となるが，外側の $r = r_+$ が事象の地平線の位置を表す．内側の $r = r_-$ は内部地平線と呼ばれる(その性質は後述)．

もう1つのエルゴ領域 (i) は3次元空間領域であるが，内側の境界は事象の地平線，外側の境界は $g_{tt}(r,\theta) = 0$ で決定される曲面で与えられる．その曲面の方程式は $r = r_{\rm IR} \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}$ である．この境界面は，そこから出た光の赤方偏移が無限遠方で無限大になることで特徴づけられ，無限赤方偏移面と呼ぶ．第3章で重力場中から放出される光が赤方偏移すること，そして重力場中での時間が遅れることを述べた．上記の座標系で静止している観測者の固有時間は

$$d\tau^2 = -g_{tt}(r,\theta)dt^2 \tag{11.5}$$

で与えられる．t は無限遠方にいる観測者の固有時間であるので，$g_{tt} = 0$ の地点から出た光は無限遠で赤方偏移が無限大になる．また，そこでの固有時間の進みはゼロになるので，無限遠方で見ているとその地点に静止している人の世界では時間が進んでいないように見える．

今，カーブラックホールの外部の性質を見るために，その周りを回る物体を考えよう[5]．軸対称定常時空であるので2つのキリングベクトル $\xi_{(t)}, \xi_{(\varphi)}$ が存在する．ブラックホールの周りを $r,\theta =$ 一定で回転する物体は，無限遠の観測者の静止系から見ると，その回転角速度は

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t} \tag{11.6}$$

で与えられる．このとき4元速度 u^μ は $\xi_{(t)} + \Omega\xi_{(\varphi)}$ に比例する．4元速度が時間的であるという条件から

$$u_\mu u^\mu = g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi} < 0 \tag{11.7}$$

が得られる．これからブラックホールの周りを回転する物体の角速度に制限

$$\Omega_{\rm min} < \Omega < \Omega_{\rm max} \tag{11.8}$$

---

*2) 事象の地平線や内部地平線は正確には3次元ヌル超曲面である．

がつく．ここで

$$\Omega_{\min} \equiv \omega - \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}}, \quad \Omega_{\max} \equiv \omega + \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\varphi\varphi}} \qquad (11.9)$$

$$\omega \equiv -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta}$$

である．この制限は，時空が平坦になる無限遠では対応する回転速度がそれぞれ $r\sin\theta\Omega_{\min} = -1$, $r\sin\theta\Omega_{\max} = 1$ $(\theta \neq 0)$ となり，光速度を超えて回転できないという当り前の条件になっている*3)．ブラックホールに近づいていくと $\Omega_{\min}(<0)$ は増加する．これは慣性系の引きずり効果によるもので，その地点における局所慣性系がブラックホール時空の回転に引きずられ，逆方向に回転する物体は見かけ上回転角速度が小さくなるように見える*4)．そして $g_{tt} = 0$ となる地点で最小角速度はゼロになり，それより内側では $\Omega_{\min}$ が正に変わる．つまりブラックホールの回転に逆行していても，(無限遠方から見ると) ブラックホールと同じ方向に回転するしかなくなるのである．この事実は，エルゴ領域の外部境界である無限赤方偏移面（$g_{tt} = 0$）が物体がその地点に留まることのできる限界点ともなっていることを示し，定常限界面とも呼ばれる．

図 11.5 には，各地点における光円錐の振舞いが示されている．エルゴ領域より内側ではブラックホールの回転方向に慣性系が引きずられ，物体はその方向にしか回れなくなっているのがわかる．またこの図から，事象の地平線内部では光円錐が，初期位置より必ず内側に入っていることもわかる．

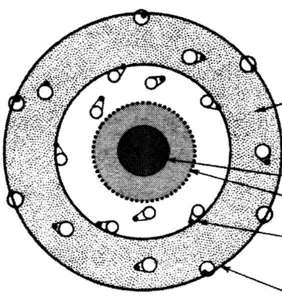


図 11.5 カーブラックホールの時空構造 (上から見た図)．光円錐の振舞いが示されている．黒い点から出た光がその後どこに到達するかが○で示されている．エルゴ領域より内側ではブラックホールの回転方向に○が引きずられ，逆方向に回ることはできなくなる．

11.4 カー時空の特異点

シュヴァルツシルトブラックホールの特異点は，地平線を越えたすべての物

*3) $\Omega < 0$ は，物体がブラックホールと逆方向に回転していることを表す．

*4) $\Omega = \omega$ で回転する観測者に対しては，局所的に $+\varphi$ 方向と $-\varphi$ 方向が対等になるので「局所無回転観測者」と呼ばれる[6)]．

体の軌道が行き着く先で，その先は存在しない「世界の終焉」である．カーブラックホールはどうであろうか．同じように $r=0$ で曲率は無限大になる．ところが $r=0$ は「点」ではなく「リング状」の構造を持っているのである．それは座標系をカーが初めに解を求めたときと同じカー・シルド型に書き変えるとわかる．

ここでは簡単のため地平線の存在しない $M^2 < a^2$ の場合について記述する（ブラックホールの場合も特異点近くの構造は同じである）[7]．座標変換 $[(t,r,\theta,\varphi) \to (T,X,Y,Z)]$

$$X+iY=(r+ia)\sin\theta\exp\left[i\int\left(d\varphi+\frac{a}{\Delta}dr\right)\right],\qquad Z=r\cos\theta,\quad T=\int\left[dt+\frac{r^2+a^2}{\Delta}dr\right]-r \tag{11.10}$$

を考えると，カー解は

$$ds^2=-dT^2+dX^2+dY^2+dZ^2+\frac{2Mr^3}{r^4+a^2Z^2}\left[\frac{r(XdX+YdY)-a(XdY-YdX)}{r^2+a^2}+\frac{ZdZ}{r}+dT\right]^2 \tag{11.11}$$

となる．ここで $r(>0)$ は

$$r^4-(X^2+Y^2+Z^2-a^2)r^2-a^2Z^2=0 \tag{11.12}$$

によって新しい座標 (X,Y,Z) と関係している．この座標系での $r=$ 一定面は図 11.6 のように回転楕円体を表す．$r=0$ は円盤（$X^2+Y^2\le a^2$, $Z=0$）を表している．この座標系で曲率不変量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ を計算すると円盤の縁

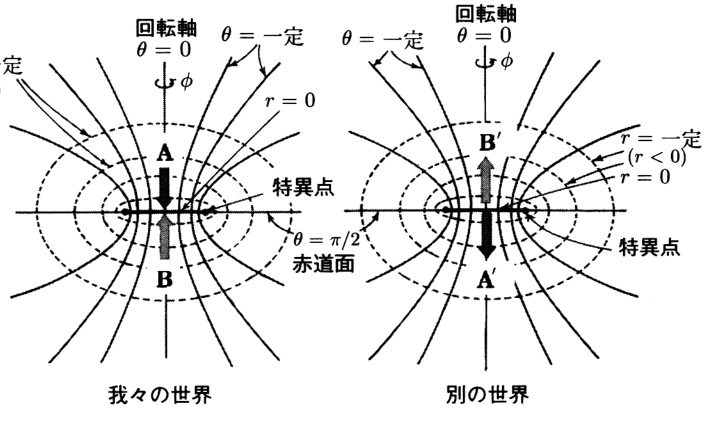


図 11.6　カー時空の特異点の構造．特異点はリング状で，その内側の円盤はリーマン面のような二重構造をしており，左図の円盤上方の地点 A から下がっていくと右図の地点 A′ に，左図の円盤下方の地点 B から上がっていくと右図の地点 B′ に出てくる．

$(X^2+Y^2=a^2,\ Z=0)$ だけで無限大になることがわかる．つまり「特異点」は「点」ではなく「リング」状に広がっているのである．

では円盤の内部はどうなっているのであろうか？ そこでは曲率は発散しないので普通の時空点である．しかしながら，円盤の上のほうの空間はそのまま下のほうにはつながっていない（下から上がっていっても同じである）．実は $r=0$ の円盤はリーマン面のように二重の構造を持つ．円盤の上のほうから下りていくと，$r=0$ の向こうには同じ (11.11) 式で表される別の空間 (X,Y,Z) が広がっている（(11.12) 式の $r<0$ の解につながる）．つまり図 11.6 の左図の地点 A から入ると右図の地点 A′ に出てくる（左図の地点 B から入ると右図の地点 B′ に出てくる）．

ボイヤー・リンドクィスト座標を用いると別の時空の世界間隔は同じ (10.15) 式で表される．当然，漸近的平坦な領域を持つ $(r\to-\infty)$ ので，向こうの世界でも局所的に強い重力源が存在する時空になっている．しかしながら $r<0$ であるので，その重力源の質量は負 $(-M)$ となる[7]．

このリング特異性付近には時間的閉曲線が存在する．つまり，リング付近を未来に一周進むと再び現在に戻ってくる．もちろんこれは因果律を破るのでそのような特異点が安定に存在するかどうかは自明でない．

11.5 カーブラックホールのペンローズ時空図

シュヴァルツシルト時空のような球対称時空では，角度方向はすべて同じ性質を持つため，その部分を記述しないことにすれば，図 11.2 のように 2 次元時空図として時空構造をすべて記述することができる．しかし，カー時空は球対称ではないので，全時空を 2 次元時空図として表すことはできない．そこで，回転軸上 $(\theta=0)$ の時空構造を見ることにしよう[8]．そのペンローズ図は図 11.7 のようになる．この図を見ると，シュヴァルツシルト時空とは異なり，事象の地平線の内部 $(r=r_-)$ にもう一つ地平線（内部地平線）があり，その「内側」にもさらに構造が続いている．

この内部地平線は，初めにブラックホールの外を含む空間的超曲面（コーシー面）上で情報が与えられているとして，その後の時間発展がその情報で完全に決まってしまう領域（因果領域）の境界となっている．この内部地平線を越えて時空は続いているが，そこでの情報は初期情報だけからは決まらず，他の領域（例えば領域 III）での情報なども必要となる．それでこの内部地平線をコーシー地平線（因果的地平線）とも呼ぶ．

このペンローズ時空図を見るとシュヴァルツシルト時空のときと異なり，ブラックホールに入ってもリング特異性の横（または中）を通って別の漸近的平坦な領域に出てくることが可能である．つまり，ブラックホールの中に入って

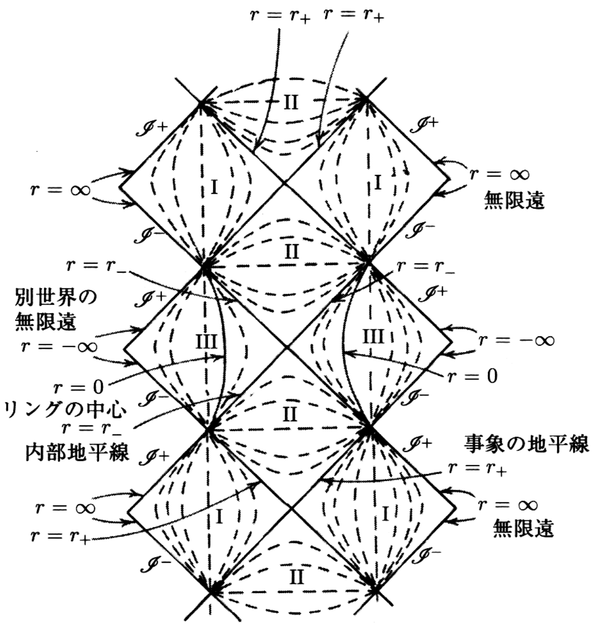


図 11.7 カー時空（軸上）のペンローズ時空図．事象の地平線 [領域 (I)(II) の境界] の内側に内部地平線 [領域 (II)(III) の境界] が存在する．また，その内側に $r = 0$（リング特異性の中心）が存在するが，そこは特異ではなく，さらに別の世界 [領域 (III) の $r < 0$] に続いている．また $r = \infty$ となる無限遠領域（平坦な時空）が複数存在するが，それらを同一視し同じ一つの世界と考えることもできるし，別の世界と見ることも可能である．

も再び外に出てこられることになる．もっともその世界は我々の宇宙ではないかもしれないが…

11.6 重力崩壊

以上はアインシュタイン方程式の真空厳密解を解析接続した時空の議論である．現実の宇宙にブラックホールが存在することは観測的にもほぼ確かであるが，それがここで述べたような性質すべてを持っているのであろうか．この章の最後に現実的に形成されるブラックホールについて考えてみよう．

十分に重い星は，そのエネルギー源を失い，構成物質の縮退圧でもその重力を支えられなくなると，限りなく収縮を続ける．これを重力崩壊と呼ぶが，その最後の姿がブラックホールである[9]．その様子を時空図で表すと図 11.8 のようになる．星の半径は時間とともに小さくなり，やがて中心から事象の地平線が現れる．その後も中心では重力崩壊が続き，地平線半径は増大するが，やがて特異点が発生する．すべての物質が事象の地平線内部に落ち込むとやがて地平線の半径は一定になり，定常的なブラックホールが形成される．このブラッ

クホール形成過程では，対称性の非常に高い球対称時空を除き，重力波が放出される．その結果最終的にブラックホールは軸対称なカーブラックホールになると考えられる．

球対称な場合このブラックホール形成の様子をペンローズ図に表すと，物質の存在がシュヴァルツシルト時空図の左半分を覆い隠し，過去の事象の地平線や特異点およびもう一つの漸近的平坦な空間は現れない（図 11.9）．つまり，現実的なブラックホール形成ではワームホール構造は現れない．

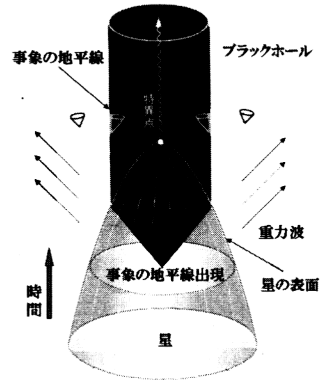


図 11.8　星の重力崩壊によるブラックホール形成．

しかしながらカーブラックホールでは別の世界は物質の存在によってもすべてが覆い隠されるわけではない．このことは図 11.7 において星の表面を記述する時間的世界線を描けばわかる．ということは，ブラックホールに飲み込まれても，ルートをうまく取れば，特異点に落ち込むことなく別の世界に抜け出すことが可能なのであろうか？

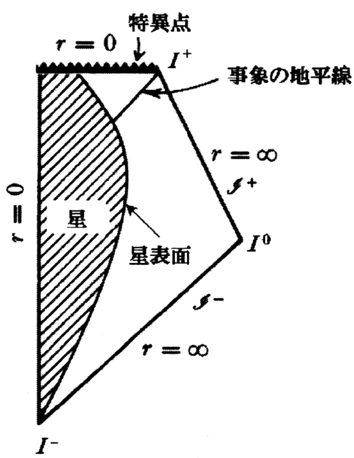


図 11.9　球対称重力崩壊のペンローズ時空図．未来の事象の地平線は形成されるが，過去の事象の地平線やもう一つの漸近的平坦な空間は存在しない．

答えは，残念ながら「NO」である．別の世界に抜け出すためには必ずカーブラックホール内部に存在する内部地平線の中に入らなければならない（図 11.7 参照）．ところがこの内部地平線は摂動に対して不安定なのである[10]．カー時空は軸対称・定常と対称性の高い仮定をして得られている．しかしながら現実のブラックホール形成ではその対称性からのずれが多少なりとも存在するであろう．このずれを摂動として扱い，アインシュタイン方程式を解析すると，この内部地平線は不安定になり，特異点に成長すると予想される．つまり，現実のブラックホールでは内部地平線のあたりでゲートが閉じられ，別の世界に抜け出すルートは閉ざされるのである．やはりブラックホールには間違っても中に入らないほうが無難である．

参考文献

1) R. Penrose, "Conformal treatment of infinity" in *Relativity, Groups, and Topology* ed. by C.M. deWitt and B. de Witt, Les Houches Summer School (Gordon and Breach, 1963).
2) C. Fronsdal, *Phys. Rev.* **116** (1959) 778.
3) M.D. Kruskal, *Phys. Rev.* **119** (1960) 1743.
4) R.W. Fuller and J.A. Wheeler, *Phys. Rev.* **118** (1962) 919.
5) C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973).
6) J.M. Bardeen, *Astrophys. J.* **162** (1970) 71.
7) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge Univ. Press, 1973).
8) B. Carter, *Phys. Rev.* **141** 1242.
9) J.R. Oppenheimer and H. Snyder, *Phys. Rev.* **56** (1939) 455.
10) W. Israel, "Black hole uniqueness and the inner horizon stability problem" in *The Future of Theoretical Physics and Cosmology* ed. by G.W. Gibbons, E.P.S. Shellard and S.J. Rankin (Cambridge Univ. Press, 2003) およびその引用文献.

第 12 章
相対論的重力と力学系

19 世紀末のポアンカレによる三体問題研究[1]以後，自然界には系の非線形性によりカオスと呼ばれる複雑な現象が普遍的に現れることがわかってきた．20 世紀のコンピュータの発達とともに，その複雑な現象は，単に「乱雑」というのではなく，非線形現象の本質的な性質を表していることがわかってきている．

一般相対性理論は非常に複雑な非線形偏微分方程式（アインシュタイン方程式）で記述されるため，新しいタイプの非線形現象が現れる可能性も存在するであろう．ここでは一般相対性理論における力学系について軽く触れたあと，強重力場中の粒子運動に現れるカオス現象について紹介しよう．

12.1　重力多体系と一般相対性理論

初めにニュートン力学における重力多体系について少し述べる．重力相互作用のみ働く N 個の質点からなる力学系を重力多体系と呼ぶ．三体問題や惑星系などの N が小さい系を議論する場合は特に天体力学と呼ばれる．当然，系は非可積分で強いカオスが発生する．それに対し N が非常に大きい系（球状星団や銀河系などの天体集団）では天体の個々の運動ではなく，系全体の統計的な性質が重要となる．

これらの系を解析するには，通常 N 個の質点に対するニュートンの運動方程式を数値的に解き，その解を系統的に調べる．重力多体系と他の多体系の大きな違いは，重力多体系には熱平衡状態が存在しないという点にある．これは重力が距離の逆二乗に比例する長距離力で，お互いに近づけば近づくほど系はエネルギーを得し，重力熱力学的カタストロフィーを起こすからである[2]．

この重力多体系に関してはまだすべてが完全にわかっておらず，多くの興味深いトピックス（負の比熱や構造相転移など）があるが，ここでは一般相対性理論を基礎にした重力系について考えることにしよう．

一般相対性理論における多体問題には原理的な問題が存在する．例えば，ニュートン力学では二体問題は一体問題に帰着でき，簡単に積分できる．ところが一般相対性理論では二体問題ですら簡単に解けない．それは二体の相対的運動により重力波放出を伴い，厳密な意味では定常的な運動が存在しなくなるからである．この相対論的二体問題にはまだ多くの原理的問題を含み，現在でも研究が続いている．そこで，ここでは外部重力場が与えられた場合のテスト粒子の運動について考えることにしよう．これは，外部重力場をつくる天体が十分に重く，その周りを軽い天体が運動する場合の近似的記述と考えてよい．

12.2 カーブラックホールの周りの粒子

初めに外部重力場としてカー時空を考えよう．これは，軸対称定常時空解で，星の重力崩壊の後に形成されるブラックホールを記述すると考えられる（第 11 章）．そのカー時空の世界間隔は (10.15) 式で表される．

今，カーブラックホールの周りを動く物体の測地線運動を考えよう．背景が軸対称定常時空であるので，エネルギー（E）と角運動量の z 成分（L）の 2 つの保存量が存在する．2 つのキリングベクトルを $\xi_{(t)}, \xi_{(\phi)}$ とするとそれぞれは $E=-p_\mu\xi^\mu_{(t)}$ と $L=p_\mu\xi^\mu_{(\phi)}$ で与えられる．ここで p_μ は粒子の 4 元運動量である．また，$p_\mu p^\mu=-m^2$ の関係式で定義される粒子の質量 m も保存量になる．カー時空は，ペトロフ分類*1)でさらに対称性の高い D 型というクラスに属しており，カーター定数と呼ばれる 4 つ目の保存量

$$\mathcal{C} = p_\theta^2 + \cos^2\theta[a^2(m^2-E^2)+L^2/\sin^2\theta] \tag{12.1}$$

を持つ[4]．このことにより，カー時空における粒子の運動は可積分になる．粒子の運動方程式は，具体的には

$$\begin{aligned}
\Sigma\frac{d\theta}{d\tau} &= \sqrt{\Theta}, \quad \Sigma\frac{dr}{d\tau}=\sqrt{R}, \\
\Sigma\frac{d\varphi}{d\tau} &= -\left(aE-L/\sin^2\theta\right)+(a/\Delta)P, \\
\Sigma\frac{dt}{d\tau} &= -a\left(aE\sin^2\theta-L\right)+(r^2+a^2)\Delta^{-1}P
\end{aligned} \tag{12.2}$$

で与えられる．ここで

$$\begin{aligned}
&\Theta\equiv\mathcal{C}-\cos^2\theta\left[a^2(m^2-E^2)+L^2/\sin^2\theta\right], \\
&P\equiv E(r^2+a^2)-La, \quad R\equiv P^2-\Delta\left[m^2r^2+(L-aE)^2+\mathcal{C}\right]
\end{aligned} \tag{12.3}$$

である．

*1) ペトロフ（A.Z. Petrov）は 1954 年，座標に依存しない重力場の不変的特徴を見るために，ワイル曲率テンソル $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ の代数的構造を調べ，時空を分類した[3]．これをペトロフ分類と呼ぶ．時空は主ヌルベクトルの縮退の度合いによって分類され，最も一般的な I 型を初めとして II 型，III 型，N 型，D 型がある．

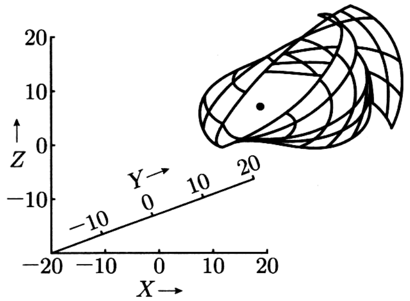


図 12.1　$a^2 = Q^2 = M^2/2$ の場合の極限カー・ニューマンブラックホール中の中性粒子の軌道．粒子の軌道要素は $E = 0.968m$, $L = 2mM$, $\mathcal{C} = 10$ ととっている[5)]．

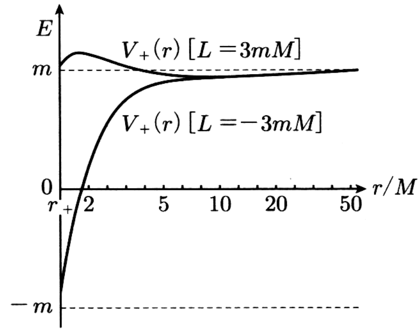


図 12.2　カー時空の赤道面上を運動する粒子の有効ポテンシャル（$a = 0.9M$, $L = \pm 3mM$）．$E < V_+$ の部分が古典的に粒子が存在できない領域になる．

カーター定数がゼロでない場合には，運動は 3 次元的な複雑な軌道を描くが可積分である．図 12.1 には回転と電荷を持った極限ブラックホール（極限カー・ニューマン時空）中の粒子の軌道が示されている[5)]．

ここでは簡単のため，赤道面上を運動する粒子についてのみ解析しよう．運動方程式 (12.2) から，赤道面上の運動（$\theta = \pi/2$, $d\theta/d\tau = 0$）は，$\mathcal{C} = 0$ の場合，軌道として矛盾しないことが示される．

運動可能領域は動径方向の運動方程式から $R \geq 0$ で与えられる．これは

$$\alpha E^2 - 2\beta E + \gamma \geq 0 \tag{12.4}$$

という条件になる．ここで

$$\begin{aligned}\alpha &= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \quad (> 0),\\ \beta &= 2LaMr\,,\\ \gamma &= L^2(a^2 - \Delta) - m^2 r^2 \Delta\end{aligned} \tag{12.5}$$

である．(12.4) 式は重力の弱い領域（$r \to \infty$）で $E \geq m$ であることを考慮すると

$$E \geq V_+(r)\,, \quad V_+(r) \equiv \frac{1}{\alpha}\left[\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}\right] \tag{12.6}$$

となる．この $V_+(r)$ は，ニュートン力学における有効ポテンシャル $V(r) = -mM/r + L^2/(2mr^2)$ に対応し，この粒子の動径方向の運動を決定する（図 12.2）．

この有効ポテンシャルの極値が円運動を与えるが，それを解析すると，最も内側に存在する安定な円軌道は表 12.1 のようになる．最も内側の安定な円軌道は，ブラックホールの周りの降着円盤の内側の半径を与えるので，その束縛エネルギーやそこからの光の赤方偏移の値などは観測的にも重要となる．

ペンローズ過程：ブラックホールからのエネルギー抽出

ブラックホールは何でも吸い込み，光すら出てこられないという強重力の世界である．そのようなところからエネルギーが取り出せると言う．どのようにしてエネルギーを出すのであろうか？ それには次のようにすればよい．

今，ある質量 m の粒子を回転するブラックホール近くに持っていき，そこで 2 つに分ける．それらの質量を m_1, m_2，角運動量を $L_1(>0), L_2(<0)$ とする．このとき，ブラックホールと逆方向に回る粒子 2 のエネルギー E_2 を負になるようにとる．そのようなことはエルゴ領域内でのみ可能になる．赤道面上の粒子で具体的に考えると，エルゴ領域では $L_2 < 0$ に対し $V(r_+) < 0$ となる．実際，図 12.2 からわかるように $L_2 < 0$ の場合，地平線のすぐ外側で粒子のエネルギーを負にとることができる（但しこの粒子は無限遠には出てこられない）．負のエネルギーを持ったこの粒子 2 をブラックホールに落とし，粒子 1 を外に引っ張り出す．初めに持っていたエネルギーを E とすると，エネルギー保存則より $E_1 = E - E_2(> E)$ となり，取り出した粒子 1 のエネルギーは初めに持っていたエネルギーより大きくなる．つまり，ブラックホールからエネルギーを取り出すことができることになる．一方，ブラックホールの質量は $M + E_2(< M)$ となり，減少する．この操作をペンローズ過程と呼ぶ[6)]．

このようなことができるためにはエルゴ領域の存在は必要不可欠で，今の場合，回転がその領域をつくり出している．つまりこのエネルギーはブラックホールの回転エネルギーを取り出したもので，同じことを繰り返すとブラックホールの回転は次第に遅くなり，最終的には回転のないシュヴァルツシルトブラックホールになる．

表 12.1 最も内側の安定な円軌道．$B/m = (m - E)/m$ は静止質量で規格化された粒子の束縛エネルギー，極限カー時空は $a = M$ の場合，順行は $La > 0$，逆行は $La < 0$ の場合を表す．

	シュヴァルツシルト時空	極限カー時空（順行）	極限カー時空（逆行）
r/M	6	1	9
E/m	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3\sqrt{3}}$
B/m	$\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 0.0572$	$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0.4426$	$\left(1 - \frac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 0.0377$
$\lvert L\rvert/(mM)$	$2\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{22}{3\sqrt{3}}$

12.3 スピン粒子の軌道とカオス

ブラックホールの周りを回る天体は質点ではない．しかしながら，相対性理論では「剛体」という概念は存在しないので，有限の大きさを考慮した天体の軌道を決定するのは，天体自身の構造が関係してくるので単純ではない．しかしながら，天体の大きさが十分無視できる程度に小さい場合，天体の回転が軌道にどう影響を与えるかを考えることはできる．初めに有限の大きさを持たせた天体のエネルギー・運動量テンソルを考え，それを多重極展開し，そのあとで大きさがゼロの極限をとる方法である[7,8)]．多重極展開の単極子が質量を，双極子が天体の自転（スピン）を与える．得られる方程式は

$$\frac{Dp^\mu}{D\tau} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} v^\nu S^{\rho\sigma}, \tag{12.7}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} = p^\mu v^\nu - p^\nu v^\mu \tag{12.8}$$

である．ここで，τ, $v^\mu = dx^\mu/d\tau$, p^μ, $S^{\mu\nu}$ はそれぞれ軌道の固有時間 ($v^\mu v_\mu = -1$)，天体の 4 元速度，4 元運動量およびスピンテンソルである．高次の多重極モーメントは無視しているので，単極子–双極子近似と呼ぶ．

(12.7) 式から重力場が強い場合は曲率項を通してスピン軌道相互作用が効いてくることがわかる．この項のため，運動量と速度が一般には比例しなくなり，v^μ と p^μ の間の関係を与える必要がある．それは大きさを持った天体の重心をどう決めるかということと関係し，そのもっともらしい条件は，$p_\mu S^{\mu\nu} = 0$ で与えられる[8]．この式から v^μ と p^μ の関係は

$$v^\mu = N\left[u^\mu + \frac{1}{2m^2\Delta}S^{\mu\nu}u^\lambda R_{\nu\lambda\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right] \tag{12.9}$$

で与えられる．ここで，$u^\nu \equiv p^\nu/m$ は単位質量あたりの運動量で，$\Delta \equiv 1 + \frac{1}{4m^2}R_{\alpha\beta\gamma\delta}S^{\alpha\beta}S^{\gamma\delta}$, および

$$N \equiv \left[1 - \frac{1}{4\Delta^2 m^2}S_{\mu\nu}u_\lambda S_{\rho\sigma}R^{\nu\lambda\rho\sigma}S^{\mu\alpha}u^\beta S^{\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}\right]^{-1/2} \tag{12.10}$$

である．この系はいくつかの保存量を持っている．まず，天体の質量 m ($m^2 \equiv -p_\nu p^\nu$) とスピンの大きさ S ($S^2 \equiv \frac{1}{2}S_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$) は保存する[9]．時空に対称性があり，キリングベクトル $\xi^{\ \mu}_{(\mathrm{A})}$ が存在すれば，

$$C_{(\mathrm{A})} \equiv \xi^{\ \mu}_{(\mathrm{A})}p_\mu - \frac{1}{2}\xi^{\ \mu;\nu}_{(\mathrm{A})}S_{\mu\nu} \tag{12.11}$$

も保存量になる[8]．

ここでは外部重力場として最も簡単なシュヴァルツシルト時空を考えよう．対称性から保存する全角運動量の方向を z 方向に取る，つまり $\boldsymbol{J} = (0,0,J)(J>0)$ とする．2 つのキリングベクトルを $\xi^{\ \mu}_{(t)}$ と $\xi^{\ \mu}_{(\varphi)}$ とおくと，2 つの非自明な保存量（エネルギーと全角運動量）

$$E \equiv -C_{(t)} = -p_t - \frac{M}{r^2}S^{tr}, \tag{12.12}$$

$$J \equiv C_{(\varphi)} = p_\varphi - r(S^{\varphi r} - rS^{\theta\varphi}\cot\theta)\sin^2\theta \tag{12.13}$$

が得られる．しかしながら，質点の場合とは異なり，スピン粒子はカーター定数のような保存量を持っていない．その結果，系は非可積分になる．実際，数値計算で軌道を解いてみると，その軌道のポアンカレ写像は図 12.3 のようになる[10]．

ポアンカレ写像というのは位相空間における軌道の断面を表しており，カオスの判定によく用いられる．系が可積分の場合は軌道のつくる部分多様体が位相空間内でトーラス構造をつくり，その断面はシャープな円形状の 1 次元的なものになる．一方，カオスのように軌道が非常に不規則になる場合，保存量がないので軌道のつくる部分多様体は位相空間内に拡がり，その断面は 2 次元的に散らばったものになる．図 12.3 からわかるように，スピンが小さいときはポ

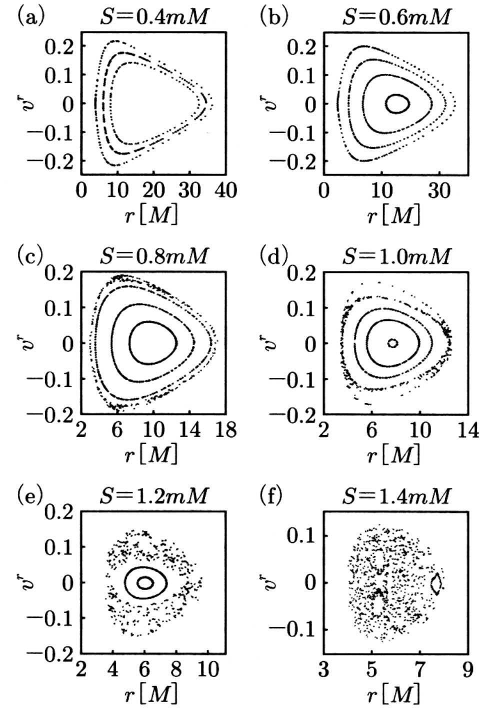


図 12.3 シュヴァルツシルト時空中のスピン粒子の軌道のポアンカレ写像．スピンが小さいときはきれいなトーラス構造が見えるが，大きくなるにつれその構造が壊れ，断面が 2 次元的に広がる．

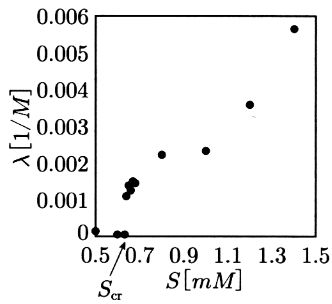


図 12.4 シュヴァルツシルト時空中のスピン粒子の軌道の最大リヤプノフ指数．スピンの値が $0.6mM$ を超えたあたりから正の値になり，カオスが現れる．

アンカレ断面はトーラス構造を保っているが，スピンの値が大きくなってくるとトーラスが壊れ，ポアンカレ写像は 2 次元的に散らばったものになる．つまり，スピンが大きくなるとシュヴァルツシルト時空のような対称性の高い外部重力場中でもカオス的軌道が現れる．

このことをよりはっきりと見るには軌道の最大リヤプノフ指数を計算すればよい．リヤプノフ指数は位相空間上で少しだけ離れた 2 つの軌道がその後どのように離れていくのかを定量的に表す指数で，正の値を取れば 2 つの軌道が時間とともに指数関数的に離れていくことを意味している．これは軌道が初期値に鋭敏であることを示しており，カオスであることを表している．リヤプノフ指数が大きな値をとればとるほどより速く 2 つの軌道は離れていくので，カオスは強くなる．

図 12.4 に，最大リヤプノフ指数がスピンの値に対しどう変わるかを示した．実際にスピンが $S \geq 0.64mM$ においてはリヤプノフ指数が正の値になり，カオスが起こっていることがわかる．

12.4 いろいろな非可積分系と重力波観測

カー時空やシュヴァルツシルト時空のような対称性の高い時空でも，テスト粒子にスピンのような属性を持たせるとその軌道がカオス的になり得ることがわかった．ここでは，系を少し変えるだけで同じように非可積分になる他の例を示そう．以下が実際に数値計算を実行しカオスが起こることが示されたいくつかの例である．

(i) シュヴァルツシルト時空の摂動[11,12]
(ii) シュヴァルツシルト時空 ＋ 一様外部磁場[13]
(iii) カー時空 ＋ ハロー（双極的重力場）[14]
(iv) 平面重力波 ＋ 一様磁場[15]
(v) 2つの極限ブラックホールの平衡解[16,17]
(vi) 多重特異点時空（複数の裸の特異点を持つカーゾン時空解）[18]

(v), (vi) は複数の固定した外部重力源を考えており，この背景自体が不安定と考えられるが，(i)～(iii) は対称性の高い軸対称定常時空にごく自然な外部要因を加えたものである．これらの例からも，カオスという現象が一般相対性理論においても普遍的に現れることがわかるであろう．

このようなカオス的振舞いは現象論的にどのような重要な効果をもたらすであろうか．すぐに思い浮かぶのが重力波の観測である．相対論的天体の運動は通常重力波の放出を伴う（第7章）．しかしながら重力波は物質との相互作用が非常に弱いため，その観測にはどのような重力波が来るかある程度予想し，テンプレートを作成しておき，観測データと比較し，小さなシグナルを多くの雑音中から何とか取り出せるようにする．ところが重力源の天体の運動がカオス的だとそのようなテンプレートがつくれるのであろうか？

重力波源として有望なのは，前にも述べたが連星中性子星や連星ブラックホールの合体である (第7章)．それらの軌道がスピン軌道相互作用でカオス的になったらテンプレート作成に困難を生ずるであろう．実際，2.5 次のポストニュートン近似を用いた連星系の軌道計算でカオスが起こることが示された[19]．しかし，別のグループは，リヤプノフ指数を示すことでその複雑な運動がカオスではないと主張している[20]．一般相対性理論においては時間座標の取り方に任意性があり，リヤプノフ指数の定義も一意的ではないのでどちらの主張が正しいかまだわからないが，仮に系が非可積分だとしても，このカオスは相対論的な効果（曲率を介したスピン軌道相互作用）によるものと考えられるので，後者のグループが主張するように，連星系が合体するまでにカオスが発生するだけの十分な時間はないと考えられる．また，ここに示した外部重力場 ＋ テスト粒子の系が近似的に正しいと考えられる現実の系（例えば巨大ブラックホールとその周りを回る天体）を考えたとしても，カオスに必要なスピンの臨界値は大き

すぎ（$S_{\rm cr} = 0.64mM \gg m^2$），現実的にはカオスは発生しないと考えられる．

しかしながら他の要因（例えばブラックホールの周りの降着円盤など）が加わり，現実的な系が非可積分になることは十分に考えられ，その結果，重力源がカオス的運動を伴うことはあり得るであろう．そのような系からの重力波予想をしておくこと，特にカオス現象特有の性質を検出される重力波の情報から抽出することは重要な課題と考える[21]．

12.5 時空のカオス

ここまでは粒子の軌道運動に対するカオス的振舞いをみてきた．しかし，一般相対性理論の特徴は，重力場そのものが非線形となる点にあり，重力場，つまり時空の振舞いに非線形物理学として本当に新しい現象が現れるだろう．第10章では非線形可積分系の典型的手法である逆散乱法を用いたアインシュタイン方程式の解の構成法について述べた．当然，カオス的に振る舞う時空解も考えられる．実際，第9章で述べた一様・非等方宇宙モデル（ビアンキモデル）がそれにあたる．このモデルでは，宇宙の進化が2次元ポテンシャル中の点粒子の運動として記述される．特に，真空のビアンキタイプIX時空は，ちょうどビリヤードのようにポテンシャル障壁が閉じていて，点粒子の軌道変化，つまり宇宙の進化が過去の特異点に向かってカオス的に振る舞う[22]．このような時空のカオスは，ビアンキタイプIX時空を除き，まだあまり研究されていないが，今後重要な課題となるかもしれない．

参考文献

1) H. Poincaré, *Les Methodes nouvelles de la Mecanique celeste* (Gauthier–Villars, Paris, 1892) [英訳 *New Method of Celestrical Mechanics* (Springer, 1993)].
2) D. Lynden-Bell, R. Wood, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **138** (1968) 495.
3) A.Z. Petrov, *Sci. Nat. Kazan State University*, **114** (1954) 55.
4) B. Carter, *Phys. Rev.* **174** (1968) 1559.
5) M. Johnstone and R. Ruffini, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2324.
6) R. Penrose, *Nuovo Cimento* **1** (1969) 252.
7) A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc.* **A209** (1951) 248.
8) W.G. Dixon, *Proc. Roy. Soc.* **A314** (1970) 499; *ibid* **A319** (1970) 509; *J. Gen. Rel. Grav.* **4** (1973) 193; *Phil. Trans. Roy. Soc.* **277** (1974) 59.
9) E. Wald, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 406.
10) S. Suzuki and K. Maeda, *Phys. Rev.* **D56** (1996) 4848.
11) L. Bombelli and E. Calzetta, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992) 2573.
12) R. Moeckel, *Commun. Math. Phys.* **150** (1992) 415.
13) V. Karas and D. Vokrouhlicky, *J. Gen. Rel. Grav.* **24** (1992) 729.
14) P.S. Letelier and W.M. Viera, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 8095.
15) J. Podolsky and K. Vesely, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 081501.
16) G. Contopoulos, *Proc. R. Soc.* **A431** (1990) 183; *ibid.* (1991) 555.
17) C.P. Dettmann, N.E. Frankel, and N.J. Cornish, *Phys. Rev.* **D50** R618.
18) Y. Sota, S. Suzuki, and K. Maeda, Class. *Quantum Grav.* **13** (1996) 1241.
19) J. Levin, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000) 3515;
N.J. Cornish and J. Levin, *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002) 179001.

20) J.D. Schnittman and F.A. Rasio, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001) 121101.
21) S. Suzuki and K. Maeda, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 024005;
K. Kiuchi and K. Maeda, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 064036.
22) V.A. Belinski, I.M. Khalatnikov, and E.M. Lifshitz, *Adv. Phys.* **19** (1970) 525;
J.D. Barrow, *Phys. Rep.* **85** (1982) 1.
23) 古沢豊明，別冊・数理科学（1988 年 4 月号）「相対論の座標」p.158.

第 13 章
時空のダイナミクス

アインシュタインの一般相対性理論は，重力を時空のゆがみと同一視することで，時空そのものを物理学的対象にし，時空物理学という新しい分野を創り出した（第 3 章）．宇宙論がまさにその対象となったわけであるが，この章では，一般的な時空の動的振舞いを解析する 2 つの標準的な手法について述べた後，時空のダイナミクスにまつわる重要なトピックスを一つ取り上げよう．

13.1 アインシュタイン理論の正準形式：ADM 定式化

量子論では通常，量子化条件（例えば位置と運動量の交換関係 $[p,x]=-i\hbar$）は時間一定の超曲面で課される．つまり時間座標を空間座標と区別しなければならない．そして正準運動量を用いたハミルトン形式が都合がよい．1950 年代に入ると，一般相対性理論を量子化するために，ベルグマン（P.G. Bergmann）たち[1)]，ディラック（Dirac）[2)]，そしてアーノウィット（Arnowitt），デサー（Deser），ミズナー（Misner）たち[3)]は，一般相対性理論にハミルトン形式を適用し，正準量子化の方法を調べた．アーノウィットらの方法は非常に整備されたものではあったが，残念ながら量子重力理論の完成には至らなかった．しかしながらこのアインシュタイン方程式をハミルトン形式で記述する方法は，時空のダイナミクスを考察するのに非常に適しており，数値相対論などの研究に大いに役立っている．この形式を，著者の頭文字を取って ADM 形式と呼ぶ．ここでは数値相対論でよく用いられる外部曲率を使った定式化をまとめる[3,4)]．

ハミルトン形式でアインシュタイン方程式を記述するため，時空を時間と空間に分けて表す．それで ADM 形式は，時間と空間の次元数から，$(3+1)$ 形式とも呼ばれる．まず，時刻（t）一定の 3 次元超曲面 $\Sigma[t]$ を考え，時空全体をこの 1 パラメータの超曲面族で張る．3 次元超曲面 $\Sigma[t]$ の計量を γ_{ij} で記述する（図 13.1）．いま少し離れた 2 つの超曲面（$\Sigma[t], \Sigma[t+dt]$）を考えよう．このとき $\Sigma[t]$ 上の点 $\mathrm{P}(x^i)$ と真上の（つまり P から垂直に伸ばした）$\Sigma[t+dt]$

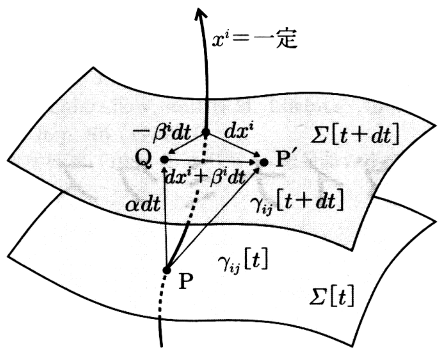


図 13.1 時空の 1 パラメータ超曲面族による記述．時刻一定の 3 次元超曲面 $\Sigma[t]$ および $\Sigma[t+dt]$ を考えると，微小に離れた 2 点 $\mathrm{P}(t,x^i)$，$\mathrm{P}'(t+dt,x^i+dx^i)$ 間の世界間隔はラプス関数 α，シフトベクトル β^i，3 次元計量 γ_{ij} を用いて表される．

上の点 $\mathrm{Q}(x^i-\beta^i dt)$ の間の時間間隔を αdt とする．ここで 2 点の空間座標の差も時間差 dt に比例するので $\beta^i dt$ とおいた．これらの変数 α,β^i をそれぞれラプス関数，シフトベクトルと呼ぶ．このとき少し離れた 2 つの超曲面（$\Sigma[t]$, $\Sigma[t+dt]$）上の任意の 2 点 $\mathrm{P}(t,x^i)$，$\mathrm{P}'(t+dt,x^i+dx^i)$ の間の世界間隔 ds^2 は，図 13.1 から

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i+\beta^i dt)(dx^j+\beta^j dt) \tag{13.1}$$

のように記述される．4 次元計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ との関係は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^2+\beta_l\beta^l & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \tag{13.2}$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij}-\frac{\beta^i\beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

で与えられる．ここで空間座標の添え字 i,j の上げ下げは γ_{ij} で行う．

時間座標と空間座標を分離したので，次にハミルトン形式の正準変数の一つである「運動量」を導入する．「運動量」は基本変数の時間微分で与えられるが，ここでは幾何学的な意味が明確な外部曲率（第二基本形式）

$$K_{\mu\nu} \equiv -P_\mu{}^\alpha P_\nu{}^\beta n_{\alpha;\beta} \tag{13.4}$$

を用いよう．ここで n_μ は超曲面 $\Sigma[t]$ に垂直な法線ベクトル，$P_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}+n_\mu n_\nu$ はその面への射影演算子，セミコロン（;）は共変微分である．法線ベクトルを超曲面 $\Sigma[t]$ 上で少し横にずらしたときの変化が $dn_i = -K_{ij}dx^j$ で与えられることから，この量の幾何学的意味がわかる．つまり，外部曲率 $K_{\mu\nu}$ は 3 次元超曲面が 4 次元時空の中でどのように曲がっているかを表す．簡単な例として，例えば，3 次元ユークリッド空間中の円筒を考えると，円筒自身の表す 2 次

元曲率はゼロであるが，外部曲率は円筒半径の逆数に比例した値を持つ．

この外部曲率を今の計量 (13.1) で具体的に計算すると

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\left(-\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + D_i\beta_j + D_j\beta_i\right) \tag{13.5}$$

となる．ここで D_i は 3 次元超曲面上の共変微分である．この量は重力場（3 次元計量 γ_{ij}）の時間微分となっており，「運動量」として用いると，アインシュタイン方程式をハミルトン形式として記述できる．計量成分の α と β^i は上記の時空の構成法からわかるように，時間座標と空間座標を決定するゲージ変数と見ることができ，力学変数ではない．

ここで，アインシュタイン方程式を，法線ベクトル n_μ と空間への射影演算子 $P_{\mu\nu}$ を用いて，時間方向と空間方向に分解する．2 階のテンソル方程式であるため，3 つの方程式に分解される．具体的には

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 8\pi G T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \equiv 8\pi G\rho_H, \tag{13.6}$$

$$G_{\mu\nu}n^\mu P^\nu{}_\alpha = 8\pi G T_{\mu\nu}n^\mu P^\nu{}_\alpha \equiv 8\pi G J_\alpha, \tag{13.7}$$

$$G_{\mu\nu}P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta = 8\pi G T_{\mu\nu}P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta \equiv 8\pi G S_{\alpha\beta} \tag{13.8}$$

の 3 つである．ここで $\rho_H, J_\alpha, S_{\alpha\beta}$ はそれぞれ 4 元速度が法線ベクトル n_μ に一致する観測者から見た物質のエネルギー密度，運動量密度，ストレステンソルである．外部曲率の定義とこの 3 つのアインシュタイン方程式は次の 2 つの組に分けられる．

[1] 重力場の束縛方程式

$$^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi G\rho_H, \quad \text{(ハミルトニアン拘束条件)} \tag{13.9}$$

$$D_j K_i{}^j - D_i K = 8\pi G J_i. \quad \text{(運動量拘束条件)} \tag{13.10}$$

[2] 重力場の発展方程式

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + D_j\beta_i + D_i\beta_j, \tag{13.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} &= \alpha\left({}^{(3)}R_{ij} + KK_{ij}\right) - 2\alpha K_{il}K^l{}_j - D_iD_j\alpha + \beta^l D_l K_{ij} \\ &\quad + D_j\beta^l K_{li} + D_i\beta^l K_{lj} - 8\pi G\alpha\left[S_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}\left(\rho_H - S^l{}_l\right)\right].\end{aligned} \tag{13.12}$$

ハミルトン形式では，基礎変数およびその運動量を正準変数として用い，時間に関する 1 階微分方程式系にする．ここでは γ_{ij}, K_{ij} の微分方程式系 (13.11), (13.12) がそれにあたる．方程式系 (13.9), (13.10) は時間を含まない方程式で，正準変数に関する拘束条件を与えるだけである．

アインシュタイン方程式を解くということは上記の 2 つの組の方程式（[1], [2]）を解くことであるが，以前述べたようにアインシュタイン方程式は，エネ

ルギー・運動量保存則 $\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0$ を内在している（第4章）．それでその4つの方程式をアインシュタイン方程式の一部の代わりに用いることができる．自然な方法は，上記の4つの束縛方程式の代わりにエネルギー・運動量保存則を用いる方法である．但し，エネルギー・運動量保存則はアインシュタイン方程式を微分して得られるので，2つの系が全く等価というわけではない．実際には，初期に拘束条件 [1] を課す必要がある．初めにその条件を満たしていれば，発展方程式 [2] とエネルギー・運動量保存則を解くことで，その後も拘束条件が満足されることが保証される．つまり，アインシュタイン方程式を解くには，初期に物質分布など（および重力波）に対する情報を与え，その時空が満たすべき計量や外部曲率を束縛方程式から決定する．その後の時間発展は重力場の発展方程式およびエネルギー・運動量保存則を解いて決定すればよい．物質として完全流体を仮定すると，エネルギー・運動量保存則はエネルギー方程式と相対論的オイラー方程式の2つに書き換えられる．

このADM形式を用いて，1980年代以降数値相対論は非常に発展し，現在ではかなり現実的な系の数値解析が可能になっている[5]．

13.2 アインシュタイン理論の共変形式による記述

時空のダイナミクスを考察するのに，アインシュタイン方程式を共変形式を使って記述する別の方法がある[6]．これは流体力学のラグランジュ的記述法をアインシュタイン方程式にまで拡張したものである．

いま時空に流体が満ちているとしよう（これは仮想的な流体でもかまわない）．その4元速度を u^μ とする．このとき4元速度 u^μ に垂直な3次元空間方向への射影演算子を $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu$ で定義し，また，テンソル場 $T^{\mu\cdots\nu}{}_{\rho\cdots\sigma}$ の4元速度方向への固有時間微分を $\dot{T}^{\mu\cdots\nu}{}_{\rho\cdots\sigma}=u^\alpha T^{\mu\cdots\nu}{}_{\rho\cdots\sigma;\alpha}$ で定義する．

このとき速度の微分を次のように分解する．

$$u_{\mu;\nu}=\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}-\dot{u}_\mu u_\nu. \tag{13.13}$$

ここで $\omega_{\mu\nu}=h_{[\mu}^{\ \alpha}h_{\nu]}^{\ \beta}u_{\alpha;\beta}$, $\theta\equiv u^\alpha_{\ ;\alpha}$, $\sigma_{\mu\nu}\equiv h_{(\mu}^{\ \alpha}h_{\nu)}^{\ \beta}u_{\alpha;\beta}-\frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$ はそれぞれ流体の渦度テンソル，体積膨張率，および速度シアテンソルである*1)．速度シアおよび渦度の大きさ σ,ω をそれぞれ $\sigma^2=\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/2$, $\omega^2=\omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}/2$ で定義する．このとき粒子数保存の法則およびエネルギー・運動量保存の法則を与えられた物理変数で記述しよう．今 $n,\rho,P,q^\mu,\Pi^{\mu\nu}$ をそれぞれ粒子数密度，エネルギー密度，圧力，熱流ベクトル，非等方ストレステンソルとすると，エネルギー・運動量テンソルは $T^{\mu\nu}=\rho u^\mu u^\nu+q^\mu u^\nu+u^\mu q^\nu+Ph^{\mu\nu}+\Pi^{\mu\nu}$ と表され，粒子数保存則 $[\nabla_\alpha(nu^\alpha)=0]$ およびエネルギー・運動量保存則 $[\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0]$ は

*1) 表記の ( ) は添え字に関して対称化し，[ ] は添え字に関して反対称化することを意味する（第4章，第7章参照）．

$$\dot{n} + n\theta = 0, \tag{13.14}$$

$$\dot{\rho} + (\rho + P)\theta + \Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + q^{\mu}{}_{;\mu} + q^{\mu}\dot{u}_{\mu} = 0, \tag{13.15}$$

$$(\rho+P)\dot{u}_{\mu} + h_{\mu}{}^{\nu}\left(P_{;\nu}+\Pi_{\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho}+\dot{q}_{\nu}\right)+\left(\omega_{\mu}{}^{\nu}+\sigma_{\mu}{}^{\nu}+\frac{4}{3}\theta h_{\mu}{}^{\nu}\right)q_{\nu}=0 \tag{13.16}$$

で与えられる．エネルギー方程式 (13.15) は熱力学第 1 法則を用いると次のエントロピー方程式になる．

$$\rho T\dot{S} = -\left(\Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + q^{\mu}{}_{;\mu} + q^{\mu}\dot{u}_{\mu}\right). \tag{13.17}$$

ここで S は単位質量あたりのエントロピー，T は温度である．これらの式は曲がった時空中の相対論的流体の基礎方程式のラグランジュ的記述である．

次にアインシュタイン方程式を共変形式で表そう．ここで共変形式と言ったのは，得られる発展方程式が座標系の取り方に依存しないテンソル量で書かれているという意味である．ADM 形式は時間と空間を分離した段階で，座標の選び方を記述するラプス関数とシフトベクトルを導入したので，共変的記述とは呼ばない．

共変的に重力場を記述するには曲率テンソルの時間発展を追いかければよい．リーマンテンソル $R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}$ は

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu} - \frac{1}{3}Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu} \tag{13.18}$$

のように分解されるが，アインシュタイン方程式（$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$）から物質の情報が得られればリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ やスカラー曲率 R はわかる．重力場独自の情報はワイル曲率テンソル $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ が担う．このワイルテンソルを次の 2 つに分割しよう．

$$E^{\mu\nu} = C^{\mu\rho\nu\sigma}u_{\rho}u_{\sigma}\ , \quad H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\alpha\beta}C^{\alpha\beta}{}_{\nu\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}. \tag{13.19}$$

この $E^{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$ をそれぞれワイルテンソルの電場成分，磁場成分と呼ぶ．これらが重力場の独立な自由度を記述するのであるが，その満たすべき方程式はビアンキ恒等式

$$R_{\mu\nu[\alpha\beta;\gamma]} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{;\sigma} = R^{\rho[\mu;\nu]} - \frac{1}{6}g^{\rho[\mu}R^{;\nu]} \tag{13.20}$$

で与えられる．この恒等式を u^{μ} 方向とそれに垂直な方向に射影すると，次の 4 つの方程式が得られる．

$$h^{\mu}{}_{\alpha}E^{\alpha\beta}{}_{;\gamma}h_{\beta}{}^{\gamma} - \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}u_{\alpha}\sigma_{\beta}{}^{\rho}H_{\gamma\rho} + 3H^{\mu}{}_{\alpha}\omega^{\alpha} = \frac{1}{3}h^{\mu}{}_{\alpha}\rho^{;\alpha}, \tag{13.21}$$

$$h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta}\dot{H}_{\alpha\beta} - h_{\alpha}{}^{(\mu}\epsilon^{\nu)\rho\sigma\lambda}u_{\rho}E^{\alpha}{}_{\sigma;\lambda} + 2E_{\alpha}{}^{(\mu}\epsilon^{\nu)\alpha\beta\gamma}u_{\beta}\dot{u}_{\gamma}$$
$$+ h^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} + \theta H^{\mu\nu} - 3H_{\alpha}{}^{(\mu}\sigma^{\nu)\alpha} - H_{\alpha}{}^{(\mu}\omega^{\nu)\alpha} = 0, \tag{13.22}$$

$$h^{\mu}{}_{\alpha}H^{\alpha\beta}{}_{;\gamma}h_{\beta}{}^{\gamma} + \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}u_{\alpha}\sigma_{\beta}{}^{\rho}E_{\gamma\rho} - 3E^{\mu}{}_{\alpha}\omega^{\alpha} = (\rho + P)\omega^{\mu}, \tag{13.23}$$

$$h^{\mu}{}_{\alpha}h^{\nu}{}_{\beta}\dot{E}^{\alpha\beta}+h_{\alpha}{}^{(\mu}\epsilon^{\nu)\rho\sigma\lambda}u_{\rho}H^{\alpha}_{\sigma;\lambda}-2H_{\alpha}{}^{(\mu}\epsilon^{\nu)\alpha\beta\gamma}u_{\beta}\dot{u}_{\gamma}$$
$$+h^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}+\theta E^{\mu\nu}-3E_{\alpha}{}^{(\mu}\sigma^{\nu)\alpha}-E_{\alpha}{}^{(\mu}\omega^{\nu)\alpha}=-\frac{1}{2}(\rho+P)\sigma^{\mu\nu}. \tag{13.24}$$

これらの式はベクトルとテンソルの違いはあるが，形式的にはマックスウェル方程式に非常に似ている．(13.21) 式と (13.23) 式が div $\boldsymbol{E}$ と div $\boldsymbol{H}$ の式に，(13.22) 式と (13.24) 式が $\dot{\boldsymbol{H}}$ と $\dot{\boldsymbol{E}}$ の式に対応している．ここで $\omega^{\mu}\equiv\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}u_{\nu}\omega_{\rho\sigma}$ は渦度ベクトルを表す．

これらの式には流体の体積膨張率 θ，渦度 ω^{μ}，速度シア $\sigma_{\mu\nu}$ が含まれており，それらがどのように発展するかも記述しなければならない．それらは 4 元速度の微分で定義されているので，その時間発展を決定するにはさらに微分した式

$$u_{\mu;\nu;\rho}-u_{\mu;\rho;\nu}\ =\ -R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}u_{\alpha} \tag{13.25}$$

を u^{μ} の方向とそれに垂直な方向に射影する．得られる 3 つの発展方程式は

$$\dot{\theta}+\frac{1}{3}\theta^{2}-\dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha}+2(\sigma^{2}-\omega^{2})+\frac{1}{2}(\rho+3P)=0, \tag{13.26}$$
$$h^{\mu}{}_{\nu}\dot{\omega}^{\nu}+\frac{2}{3}\theta\omega^{\mu}=\sigma^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\nu}+\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}u_{\alpha}\dot{u}_{\beta;\gamma}, \tag{13.27}$$
$$h_{\mu}{}^{\alpha}h_{\nu}{}^{\beta}\dot{\sigma}^{\alpha\beta}+\frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu}-h_{\mu}{}^{\alpha}h_{\nu}{}^{\beta}\dot{u}_{(\alpha;\beta)}-\dot{u}_{\mu}\dot{u}_{\nu}+\omega_{\mu}\omega_{\nu}+\sigma_{\mu\alpha}\sigma^{\alpha}{}_{\nu}$$
$$-\frac{1}{3}h_{\mu\nu}\left(\omega^{2}+2\sigma^{2}-\dot{u}^{\alpha}{}_{;\alpha}\right)-\frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}=0 \tag{13.28}$$

となる．(13.25) 式には時間発展を表さないものも含まれる．それらや恒等式 $R^{\mu}{}_{[\alpha\beta\gamma]}\equiv0$ から得られる $u_{[\mu;\nu;\rho]}=0$ を用いると次の 3 つの方程式が得られる．

$$h^{\mu}{}_{\alpha}\left(\omega^{\alpha\beta}{}_{;\beta}-\sigma^{\alpha\beta}{}_{;\beta}+\frac{2}{3}\theta^{;\alpha}\right)+(\omega^{\mu}{}_{\alpha}+\sigma^{\mu}{}_{\alpha})\dot{u}^{\alpha}=q^{\mu}, \tag{13.29}$$
$$\omega^{\alpha}{}_{;\alpha}=2\omega^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}, \tag{13.30}$$
$$H_{\mu\nu}=2\dot{u}_{(\mu}\omega_{\nu)}-h_{\mu}{}^{\alpha}h_{\nu}{}^{\beta}\left(\omega_{(\alpha}{}^{\rho;\sigma}+\sigma_{(\alpha}{}^{\rho;\sigma}\right)\epsilon_{\beta)\rho\sigma\lambda}u^{\lambda}. \tag{13.31}$$

これらは考えている変数の拘束条件を与える．

結局，時空の発展を表す基礎方程式は (13.14)～(13.16)，(13.22)，(13.24)，(13.26)～(13.28) の各式となる．束縛方程式は (13.21)，(13.23)，(13.29)～(13.31) の各式である．これらの方程式系を閉じさせるには，さらに状態方程式 $P=P(\rho,S)$ や粘性係数 λ $[\Pi_{\mu\nu}=-\lambda\sigma_{\mu\nu}]$，熱伝導率 $\kappa\,[q_{\mu}=-\kappa h_{\mu}{}^{\nu}(T_{;\nu}+T\dot{u}_{\nu}))]$ の情報が必要である．

この共変形式を用いた時空の動的方程式の記述は特別な座標系を持ち込まなくてもよく，非物理的なゲージモードを含まないので，時空のダイナミクスを解析するのに適していると考えられる．しかしながら，この方法の具体的な応

用は特別な系に限定されているのが現状である．現実には一様宇宙やその摂動方程式の記述や非一様ダスト時空の解析などに応用されている[7]．

13.3 重力崩壊の臨界現象

時空の動的振舞いを考える上で重要な現象が発見された[8]．重力崩壊における臨界現象である．ブラックホールが形成される過程については以前に少し述べた（第11章）．現実の星の重力崩壊でできるブラックホールは太陽質量より重いものしか存在しないと考えられるが，仮想的な状況を想定すると，重力の特徴であるスケール不変性が重要となる現象が見られる．1993年，チョップティック（M.W. Choptuik）は質量ゼロのスカラー場の球対称重力崩壊を数値的に解析し，「重力崩壊の臨界現象」と呼ばれる興味深い重力場の振舞いを見つけた[8]．

スカラー場 ϕ が局在した球状の「星」を考える．重力が働かなければこのスカラー場は密度の低いほうに拡散していき，無限に広がる空間に雲散霧消する．しかしスカラー場の自己重力を考えると密度の高い部分はより収縮しようとする．この2つの効果の競合により最終的には2つの状態が考えられる．無限空間に散らばり「星」は完全に消滅するか，重力が打ち勝ちブラックホールが形成されるかの2つの可能性である．この2つの運命を分けるのはスカラー場の初期分布で，例えば中心密度が高いとブラックホールになるだろうし，低いと構造は消滅する．その境を決める臨界値が存在するであろう．

チョップティックは次のような球対称計量を仮定した．

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{13.32}$$

スカラー場 $\phi(t,r)$ の変数として $\Psi \equiv \partial\phi/\partial r$ ，　$\Pi \equiv (a/\alpha)\,\partial\phi/\partial t$ を用いると基礎方程式は

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\alpha}{a}\Pi\right),\quad \frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\alpha}{a}\Psi\right), \qquad \text{[スカラー場の方程式]} \tag{13.33}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial r} - \frac{a^2-1}{r} = 0, \qquad \text{[計量 (13.32) で表すための座標条件]} \tag{13.34}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{a^2-1}{2r} - 2\pi r\left(\Pi^2 + \Psi^2\right) = 0, \qquad \text{[ハミルトニアン拘束条件]} \tag{13.35}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial a}{\partial t} = 4\pi r\,\Psi\Pi, \qquad \text{[重力場の発展方程式]} \tag{13.36}$$

で与えられる．ここで $\alpha(t,0)=1$ とおくと，t は中心での固有時間になる．初期分布を与え，この式を数値的に解くことによって次の事実が発見された．初期分布を特徴づけるパラメータ p の臨界値を p_* とすると，臨界値を少し越えたときに形成されるブラックホールの質量は

$$M \propto |p - p_*|^\gamma \tag{13.37}$$

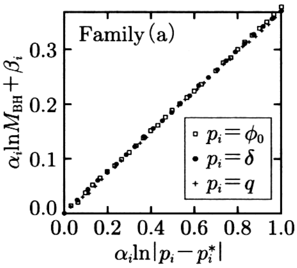


図 13.2　形成されるブラックホールの質量 M と初期値パラメータ p の関係．相転移における臨界現象のように相転移点付近でべき的な関係 $M \propto |p-p_*|^\gamma$ が現れる[8)]．

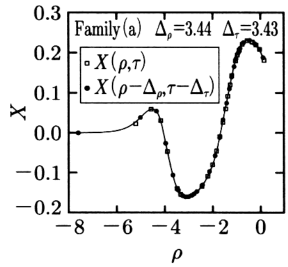


図 13.3　ブラックホールの形成時において現れるスカラー場の自己相似分布．$\Delta \approx$ 3.44 だけ離れた時刻の分布が重ね合わされている[8)]．

で与えられる（図 13.2）[8)]．

ここで臨界指数 $\gamma \approx 0.37$ は初期分布によらない普遍的な値を持つ．またスカラー場の空間分布はブラックホールが形成される直前に自己相似な特別な分布をとる (図 13.3)．今の場合は，時間方向に離散的な分布が自己相似になる．つまり，$x = r/(t-t_*), \tau = -\ln[-(t-t_*)/L]$ とおくと，a, α, ϕ などの変数 $Z(x,\tau)$ は漸近的に特別な解 $Z_*(x,\tau)$ に近づく．ここで t_* は自己相似解に近づくときの時刻，L は系の典型的な長さスケール，Z_* は $Z_*(x,\tau+\Delta) = Z_*(x,\tau)$ $(\Delta \approx 3.44)$ という関係を持つ時間方向に離散的な自己相似解である[8)]．

これに似た振舞いはスカラー場以外の物質場でも見られる．輻射流体$(P = \frac{1}{3}\rho)$ から構成される完全流体の場合，臨界指数は $\gamma \approx 0.36$ で，漸近分布は時間 τ に依存しない自己相似解 $Z_*(x)$ になる[9)]．一般の完全流体の場合 $(P = (\Gamma-1)\rho)$ も同様に一旦自己相似解に漸近的に近づいた後，ブラックホールが形成される[10)]．

この臨界現象は次のように理解できる[11)]．そのような現象の起こる条件としては，まず自己相似解が存在する系であること，そしてその自己相似解が不安定なモードを 1 つだけ持つことである．

完全流体などの自己相似解を持つ後者の場合について考察しよう．今自己相似解 $Z_*(x)$ の周りの摂動 $Z(x,\tau) = Z_*(x) + \delta Z(x,\tau)$ を考え，摂動方程式を解くと $\delta Z(x,\tau) = \sum_i C_i e^{\lambda_i \tau} Z_i(x)$ と表すことができる．ここで i は摂動の各モードを表し，λ_i，$Z_i(x)$ はその固有値および固有関数である（$C_i(p)$ は初期値 p に依存した定数）．今不安定モードが一つしかないとし，その固有値を $\lambda_0\,(>0)$ とおくと，十分時間が経過した後では不安定成長モードのみが卓越し，また $C_0(p_*) = 0$ であるので

$$Z(x) \underset{\tau\to\infty}{\simeq} Z_*(x) + \left(\frac{dC_0}{dp}\right)_{p_*} (p-p_*)\, e^{\lambda_0 \tau} Z_0(x) \tag{13.38}$$

となる．

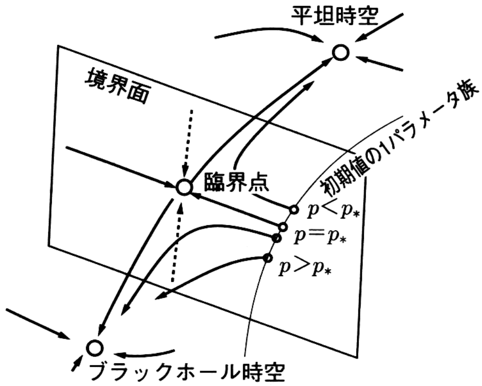


図 13.4　解はまず漸近的に臨界点（自己相似解 $Z_*(x)$）に近づき，その後不安定モードにしたがって，ブラックホールになったり（$p > p_*$），雲散霧消する（$p < p_*$）[11]．

この式からわかるように，解はまず漸近的に自己相似解 $Z_*(x)$ に近づき，その後不安定モードに従って，ブラックホールになったり雲散霧消するため（図 13.4），その直前に普遍的な分布が現れる．スカラー場の場合はこの臨界点が相空間でリミットサイクルになるために時間方向に離散的な自己相似解が現れる．

臨界指数 γ の普遍性もこの摂動解から理解できる．今 p_* に十分近い初期値 p からスタートすると，不安定摂動モードが卓越したときも (13.38) 式のように $Z_*(x)$ からのずれは線形摂動で表される．その係数が $\epsilon(\ll 1)$ になったときの時刻を τ_ϵ とすると $\epsilon = (dC_0/dp)_{p_*}(p-p_*)e^{\lambda_0\tau_\epsilon}$ である．このとき $x = -r/L_\epsilon$ $(L_\epsilon = Le^{-\tau_\epsilon})$ となるので，その時刻 τ_ϵ での変数は L_ϵ のみに依存する．できるブラックホールの質量 M は長さの次元を持った量であるので，$M \propto L_\epsilon \propto (p-p_*)^{1/\lambda_0}$ となり，臨界指数は $\gamma = 1/\lambda_0$ と不安定モードの固有値で表されることになる．つまり初期値に依存しない普遍的な指数となる．

この結果は，重力のスケール不変性がそのダイナミクスに重要な役割をすることを示しており，重力場の本質的な特徴を捉えたものと考えられ，重力理論研究の一つの鍵となるであろう．

参考文献

1) P.G, Bergmann, R. Penfield, R. Schiller and H. Zatzkis, *Phys. Rev.* **80** (1950) 81.
2) P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **246** (1958) 333.
3) R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, "The dynamics of general relativity" in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. by L. Witten (New York; Wiley, 1962) pp.227.
4) J.W. York, Jr., "Kinematics and Dynamics of General Relativity" in *Sources of Gravitational Radiation*, ed. by L.L. Smarr (Cambridge Univ., 1979) p.83.
5) T. Nakamura, K. Oohara, and Y. Kojima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **90** (1987) 1; 中村卓史，三尾典克，大橋正健『重力波をとらえる』（京都大学学術出版会，1998）；柴田大『一般相対論の世界を探る：重力波と数値相対論』（東京大学出版会，2007）．

6) G.F.R. Ellis, 「Relativistic Cosmology」 in *General Relativity and Cosmology*, ed. by R. Sachs (Academic, New York, 1971) p.104.
7) S.W. Hawking, *Astrophys. J.* **145** (1966) 544; G.F.R. Ellis and M. Bruni, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 1804; M. Bruni, G.F.R. Ellis, and P.K.S. Dunsby, *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 921; M. Bruni, P.K.S. Dunsby, and G.F.R. Ellis, *Astrophys. J.* **395** (1992) 34; D. Langlois and F. Vernizzi, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 091303; S. Matarrese, O. Pantano, and D. Saez, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 1311; M. Bruni, S. Matarrese, O. Pantano, *Astrophys. J.* **445** (1995) 958.
8) M.W. Choptuik, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 9.
9) C.R. Evans and J.S. Coleman, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 1782.
10) D.W. Neilsen, M.W. Choptuik, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 761.
11) T. Koike, T. Hara, and S. Adachi, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 5170; D. Maison, *Phys. Lett.* **B366** (1995) 82; M.W. Choptuik, arXiv:gr-qc/9803075 (1998); C. Gundlach, *Living Review in Relativity* **2** No.4 (1999) (lrr–1999–4).

第 14 章
ブラックホールの熱力学

ブラックホールは，すべてを吸い込み，時間とともに成長する．衝突によってもブラックホールは大きくなっていく．そのようなブラックホールの力学法則は熱力学の法則に似ていると言う．それが単なる類似でないことは，ブラックホールにミクロな世界で成り立つ量子論を適用することではっきりする．非常に小さなブラックホールの研究は，未だに完成されていない量子重力理論や素粒子統一理論の重要な手がかりを与えるかもしれない．

14.1 ブラックホールの力学

ブラックホールは，あらゆるものを吸い込み，またそこからは何も放出しない天体である．その一方通行の世界から予想できることは，「ブラックホールはものを吸い込みながらだんだん大きくなっていくだろう」ということである．このことをブラックホールの表面積増大則という法則として数学的に厳密に証明したのがホーキングである[1]．ブラックホールがどのように周りのものを取り込み，またブラックホールどうしの衝突によってどう成長するのかといったブラックホールの力学に関しては，他にもいくつか普遍的な法則が知られている．

ブラックホールはアインシュタイン方程式の真空解の一つであるので，意外にその性質は単純である[*1]．表面の重力加速度を考えてみよう．星の表面重力加速度はどこも同じではない．例えば地球表面上の重力加速度 g はおよそ $980\,\mathrm{cm/sec^2}$ であるが，正確な値は場所によって異なる．それは地球の形やその下にどのような物質が埋まっているかなどによって変わるのである．ところが，ブラックホールに関しては，地平線上の重力加速度 κ は，M, a, Q をそれぞれブラックホールの質量，単位質量あたりの角運動量，および電荷とすると，

---

*1) ここではブラックホール解の一意性からカー・ニューマンブラックホールのみを考える．

ブラックホール解の一意性

ブラックホール時空に関して「アインシュタイン方程式の漸近的平坦な定常真空解はカー解に限られる」という『カー解の唯一性定理』がある．また，電磁場のみを含む場合には「定常時空解はカー・ニューマン解に限られる」と拡張される．この定理は，イスラエル（W. Israel），カーター（B. Carter），ホーキング，およびロビンソン（D.C. Robinson）らの一連の論文によって証明された[2~5]．イスラエルは，漸近的に平坦な真空（または電磁場のみを伴う）静的時空が，トポロジーが S^2 の事象の地平線を有していれば，球対称であることを示した．バーコフの定理*1) と合わせると時空はシュヴァルツシルト（またはライスナー・ノルドシュトルム）解になる．カーターとロビンソンは，定常軸対称時空が，トポロジーが S^2 の事象の地平線を有していれば，カー解（またはカー・ニューマン解）に限られることを証明した．ホーキングは，定常時空が静的か軸対称であることを示し，また，事象の地平線のトポロジーは S^2 に限られることを証明した*2)．これらの定理を合わせると『カー解の唯一性』が示される．

しかしながら，この定理では時空の定常性を仮定しており，現実の重力崩壊で最終的に落ち着く時空がカー（またはカー・ニューマン）解であるかどうかわからない．実際，球対称時空のダスト重力崩壊で「裸の特異点」が形成される場合も知られており，「裸の特異点」が形成されるのか，カー時空に落ち着くのかという最終時空問題は，現在でも相対論の重要課題の一つである．この問題に関して，ペンローズは『宇宙検閲官仮説』という興味深い仮説を提唱している[6]．「裸の特異点」が存在するとそこでは古典力学の前提である未来の予言能力を喪失する．それで，ペンローズが考えたのは，「自然界では『裸』がそのまま出てくるのは許されない．事象の地平線という『衣』を必ずまとわなければならない」という仮説である．そうすると『裸の特異点』は自然界に存在せず，『カー解の唯一性定理』から重い星の最後の姿はカーブラックホールということになる．

---

*1) 球対称の漸近的平坦真空解はシュヴァルツシルト解に限られる（Birkoff, 1923）[7]．

*2) この結果は時空の次元数に依存する．実際，5 次元以上の時空では異なったトポロジーを持つ漸近的平坦なブラックオブジェクト（例えば，ブラックリング解[8]）が存在する．

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2M[M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}] - Q^2} \tag{14.1}$$

で与えられ，場所によらない．赤道面上も回転軸上も全く同じである．

ブラックホールの質量については，質量公式というものがわかっており，

$$M^2 = \left(M_{\rm ir} + \frac{Q^2}{4M_{\rm ir}^2}\right)^2 + \frac{J^2}{4M_{\rm ir}^2} \tag{14.2}$$

（$J = Ma$）と表される[9]．一般に，質量 M には回転エネルギーなどの付帯的エネルギーも含まれるが，その分はペンローズ過程などを使って原理的にはブラックホールから取り出せる（第 12 章）．それに対し，$M_{\rm ir}$ は，いったんできたブラックホールからは取り出せない「静止質量」に対応している．実際，事象の地平線の表面積は $A = 16\pi M_{\rm ir}^2$ と表され，表面積増大則

$$dA \geq 0 \tag{14.3}$$

から，$M_{\rm ir}$ は減少しない．また，ブラックホールに微小物体（質量 dM，角運動量 dJ，電荷 dQ）が落下したときに増加する表面積 dA は，(14.2) の微分形

$$dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Omega_+ dJ + \Phi_+ dQ \tag{14.4}$$

で与えられる．ここで，

表 14.1 熱力学とブラックホール力学の法則の類似性.

	熱力学	ブラックホール力学
第 0 法則	熱平衡 (温度 T が一定)	表面重力加速度 κ が 事象の地平線上で一定
第 1 法則	エネルギー保存則 $dE = TdS - PdV$	質量公式 $dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Omega_+ dJ + \Phi_+ dQ$
第 2 法則	エントロピー増大則 $dS \geq 0$	表面積増大則 $dA \geq 0$
第 3 法則	ネルンストの定理 (絶対零度：$T = 0$)	宇宙検閲官仮説 (極限ブラックホール：$\kappa = 0$)

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad \Phi_+ = \frac{r_+ Q}{r_+^2 + a^2} \tag{14.5}$$

は，それぞれブラックホールの回転角速度，地平線上の静電ポテンシャルの値で，(14.4) 式の最後の 2 項は物体がブラックホールに落下するときにする仕事を表す（$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$：地平線半径）．その結果，(14.4) 式は，エネルギーと質量を同一視すると，熱力学第 1 法則 $dE = TdS - PdV$（内部エネルギー E，温度 T，エントロピー S，圧力 P，体積 V）と酷似している．この類似性を推し進めると，κ, A はそれぞれ係数を除いて T, S に対応していると考えられる．

また，星が重力崩壊してできる最終時空構造がブラックホールであるとすれば裸の特異点は現れない（ペンローズの宇宙検閲官仮説）．この条件はブラックホールの回転や電荷に制限を与える（$a^2 + Q^2 \leq M^2$）．あまり速く回転していたり，大きな電荷を持っていたりすると，地平線が消滅し，中にある特異点が直接見えてしまう．このぎりぎりいっぱいの回転や電荷を持ったブラックホールを極限ブラックホールと呼ぶが，その表面重力加速度はゼロになる．宇宙検閲官仮説が正しいとすれば，極限ブラックホールを超える回転や電荷を持った“ブラックホール”は存在しないということになり，表面重力加速度ゼロが限界となる．この限界の極限ブラックホールに有限操作で到達できなければ，まさに熱力学第 3 法則に対応する法則が存在することになる．

このように，ブラックホールの力学は熱力学の法則に極めて似ていることがわかる．(14.4) 式は熱力学第 1 法則に，表面積増大則 (14.3) はエントロピー増大則（第 2 法則）に対応する．表面重力加速度 κ をブラックホール温度とすると，地平線上で重力加速度が一定というのは，熱平衡条件である温度一定ということに対応する（第 0 法則）．また，「表面積 A がエントロピー S に対応する」という思考実験による議論もある[10)]．これらの類似性をまとめると表 14.1 のようになる[11)]．もちろん考察を類似性だけで推し進めると大きな失敗をする．一見同じように表される法則もその背後には全く異なる基本原理がある場合も

多い．いすの足も犬の足もどちらも4本だから「いす」と「犬」は似ているなどという論理が暴論であるのは明らかだ．

14.2 熱力学とブラックホールの蒸発

しかしそれにしてもブラックホール力学と熱力学の法則はよく似ている．そのような類似は偶然なのであろうか？ 実はそうではない．ブラックホールを本当に熱力学的対象と考える根拠があるのだ．これは全くひょんなことから見つかった．曲がった空間における場の量子論の研究が，60年代末，膨張宇宙を舞台に始まった[12]．また，回転ブラックホールからエネルギーを取り出すペンローズ過程を量子論的に取り扱うと，自発的なエネルギー放射（超放射現象）が起こることも知られていた[13]．

ちょうどそのころ，ホーキングは，重力崩壊によって形成されるブラックホールが，量子論的効果により，ある温度 T のプランク分布した熱輻射として粒子を放出することを示した[14]．シュヴァルツシルトブラックホールの場合，その温度は $T=(8\pi M)^{-1}$ と，質量 M に逆比例する．太陽質量ぐらいのブラックホールではその温度は非常に低く（約 10^{-6}K），そのような効果は現実的には無視できる．しかし宇宙初期に形成されたかもしれない原始ブラックホールでは重要になる可能性がある．実際，小惑星程度（$\sim 10^{15}$ g）のブラックホールが存在すれば，現在の宇宙で蒸発しつつあることになる．

回転ブラックホールに対しても同様の計算は可能で，熱力学との類似性から推測されるように，そのブラックホールの温度 T は

$$T=\frac{\kappa}{2\pi} \tag{14.6}$$

であることがわかった．これから，エントロピーは

$$S=\frac{A}{4} \tag{14.7}$$

となる．ブラックホール力学と熱力学の類似性は意外なところで，その係数まで決定された．単なる類似性だけからは決まらなかった係数が，ミクロな量子過程を考えることにより決まったのである．

ところがブラックホールの表面積がエントロピーに比例するとすると少しおかしなことが出てくる．ブラックホールが蒸発するとすればブラックホールは小さくなっていくのだから，その表面積も減少する．ということは，ブラックホールのエントロピーは減少することになる．量子論を考えることによってブラックホール温度が決定され，ブラックホールを熱力学の対象とする基盤ができた．しかし，そのことが逆に第2法則に対応する表面積増大則を崩すことになる．では，ブラックホールの熱力学は意味がなくなったのであろうか？

もう少し慎重に考えよう．普通の熱力学では，閉じた系のエントロピーは増

ブラックホールの蒸発

宇宙に存在する巨大なブラックホールにミクロの世界を支配する量子論が影響するとは思えない.「ブラックホールに量子論が関係するのか」と疑問を持つ読者もいるであろう. どのようなブラックホールなら量子論が必要となるのであろうか？

量子力学誕生以前に謎であった粒子の相反する性質（「粒子性」と「波動性」）は，量子論では考えている粒子の 2 つの側面（二重性）として捉えられる. そして質量 m を持った粒子がその波動性を示すスケールがコンプトン波長（$\hbar/mc$）である. 例えば，電子では 3.8×10^{-11} cm，陽子では 2.1×10^{-14} cm になる.

そのような大きさのブラックホールを考えると，それを取りまく粒子は波動性を示し，量子論が必要になるに違いない. 例えば，重力半径（$2GM/c^2$）を陽子のコンプトン波長と等しくおくと，ブラックホールの質量は $M=1.4\times10^{14}$ g となる. そのような小さなブラックホールの周りでは陽子を量子論的に扱う必要が出てくる. 一方，重力場つまり時空が量子化されるスケールはと言うと，$G, c, \hbar$ からつくられるプランク長（1.6×10^{-33} cm）やプランク質量（2.2×10^{-5} g）であろう. 物質場が量子化されるスケールと重力場が量子化されるスケールには大きな隔たりがある. それで重力場を古典的に扱う半古典的アプローチは正当化されると考えられている.

このように時空を量子化せず古典的に取り扱い，物質場の量子論をブラックホール形成過程で考えると，何でも吸い込むはずのブラックホールから粒子が放出され[14]，最終的に消滅するのである. 古典論では起こり得ない現象が起こる. それがブラックホールの蒸発である. 具体的な計算の結果，ある温度（$T=(8\pi M)^{-1}$）の熱輻射として粒子が放出されることがわかった. これをブラックホールの熱輻射とかホーキング輻射と呼ぶ. 放出粒子の種類は，81%がニュートリノ，17%が光子，残りの 2% が重力子である.

このブラックホールの温度は太陽の重さ程度のブラックホールでは 10^{-6}K と非常に低い. ブラックホールが蒸発し消滅するのに宇宙年齢（約 140 億年）の 10^{54} 倍かかってしまう. 蒸発効果が実際に顕著になるのは 10^{15} g 程度の小さなブラックホールである. そのようなブラックホールは蒸発によっていま正に消滅しようとしているところである. 粒子が放出されるとブラックホールはエネルギーを失い，それだけ質量が減少する. 質量が減るとそれに逆比例して温度は上昇するから，熱輻射の放出率は高くなる. その結果ブラックホールは加速的にその質量を失い，最後には蒸発して「消滅」する. この最後の瞬間は蒸発などという生易しいものではなく，「爆発」に近い. 最後の 1000 トンのブラックホールは 1 秒間ですべてがエネルギーに変換され，消滅する. その様子は，高エネルギー γ 線バーストとして観測されるはずであるが，現在のところまだその証拠は見つかっていない.

1976 年，ホーキングは科学雑誌「ネイチャー」にブラックホール蒸発の短い論文を発表した[14]. その本論文を某学術雑誌に投稿したとき，掲載を拒否されたと言う. それほど当時の物理学者にとっても驚きであった. 現在では，その理論は物理学者だけでなく，多くの天文学者にも信じられている. ただし，その最後の最後がまだわかっていない. 大きさにしてプランク長，重さにしてプランク質量まで小さくなったブラックホールの運命がよくわからないのである. このスケールになると時空そのものが量子的に振る舞うと予想され，量子重力理論が必要になると考えられる.

大するが，開いた系では必ずしもそうでない. 全エントロピーが増大するだけで，一部の系だけに注目した場合，エントロピーは増大しなくてもかまわない. 実際，散らかったところを片付けるというのは，その部分のエントロピーを減少させているわけである. しかしその分，周りのエントロピーはもっと増えているわけで，全体としてはエントロピーは増えているのである. ブラックホールの蒸発はどうであろうか？ ブラックホールだけのエントロピーを考えていてはだめである. 蒸発を考えているのだから，ブラックホールの外に物質を放り出しているのである. 物質も当然エントロピーを持っているわけで，エントロ

ピーの増減を考えるには双方を合わせた全エントロピーを考える必要がある．実際，ブラックホールとその周りの輻射のエントロピーの和は増大することが，思考実験によって示される．このエントロピーの増大則を一般化された第2法則と呼ぶ[15)]．このように拡張すると，ブラックホールは周りの物質も含めた形で熱力学の法則を満たす．ブラックホール力学と熱力学の類似性は，単なる「類似」以上の内容を含んでいるのである．

14.3 熱力学のミクロな理解：ブラックホールエントロピーの起源

熱力学は非常によくできた理論である．いろいろな実験結果をうまく整理し，現象記述に必要な要素のみを取り出した究極の経験則と言ってよい．アインシュタイン自身も，特殊相対性理論を考え出したころ「理論というものは，前提が単純であればあるほど，またより多くの事実を関連づければ関連づけるほど，さらにその適用範囲が広ければ広いほど，強い感銘を与えるものである．それ故に，古典熱力学は私に強い感銘を与えたのであった．それは普遍的な内容を包含する唯一の物理理論であり，その基本概念の適用範囲において，この理論が破棄されることは決してないと私は確信している」と言っている[16)]．絶対的な信頼である．

しかしながら，熱力学はマクロな熱現象を記述するのに十分ではあるが，何故そうなのかというもっと基礎的な問いには答えてはいない．熱力学の本当の理解は，ミクロな視点に立った統計力学の登場によって得られることになる．マイヤー（J.R. von Meyer）によって唱えられた熱と力学的エネルギーの等価性により熱現象はミクロな原子・分子のランダム運動で表される．その結果，系の1つのマクロな熱力学的状態は，ミクロな視点ではすべての粒子状態を完全に決定したものではなく，非常に多くの状態に対応することになる．この考え方から，ボルツマン（L.E. Boltzmann）は有名なエントロピーの公式

$$S = k_B \ln W \tag{14.8}$$

に辿り着いた．ここで，k_B はボルツマン定数，W は系の可能な状態数である．この状態数は，古典的には相空間に人為的な有限最小体積を導入しない限り無限個の状態が取り得るので問題となるが，量子論的には，不確定性原理から相空間の最小体積が自然に与えられるので，ちゃんと数え上げることができ，明確な意味を持つ．考えられるすべての状態を数え上げたものを状態和と言い，熱力学量および熱力学の法則はすべてその状態和から導かれる．マクロな熱力学の本質が量子統計力学によりミクロな観点から解明されたのである．

ブラックホールの熱力学はどうであろうか．通常の熱力学同様にミクロな統計力学的理解が可能なのであろうか．ブラックホールのエントロピーはミクロ

な量子論的考察から導くことができるのであろうか．現時点ではその答えはまだわかっていないと言うしかない．ただ，いろいろなアプローチが試みられている．ブラックホール温度が量子論を考えることによって得られたのであるから，エントロピーをミクロな観点から考えるときも当然量子論的取扱いが必要であろう．ここではその中でも有望な2つのアプローチを挙げておこう．

第一は，「ブラックホールエントロピーがミクロな状態の状態和から導かれる」という画期的な発見が超紐理論において報告された[17]．もっとも，極限ブラックホールに対してだけであるが．これは，弱結合の極限と強結合の極限の間の「双対性」という対応関係を用いる．ブラックホールは当然強結合領域の対象であるが，それと双対的な弱結合領域の対象を考えると，そこでは摂動論を使うことができ，状態数の数え上げが可能となる．その状態和を使ってエントロピーを計算すると，対応するブラックホールの公式(14.7) に一致するというわけだ．ブラックホールの種類が限られるとは言え，ブラックホールエントロピーを統計力学的アプローチで係数まで厳密に求めたというのは驚くべきことである．このことは，超紐理論こそが本当の究極理論であるという期待を抱かせる．弱結合領域における統計力学が強結合領域におけるブラックホールの熱力学として現れるというのが本当だとすると，我々は強い重力場における熱力学的性質の基本的な理解に一歩進んだと言える．

もう一つ別のアプローチも最近注目されている．重力場の正準量子化に正面から取り組む方法で，ループ量子重力理論と呼ばれている[18]．この理論には，一つの未知定数が含まれるが，ブラックホールエントロピーが表面積に比例することを導くことができる．(14.7) 式に一致するように未知定数を決めてやれば，時空の離散性からブラックホールエントロピーが説明でき，統計力学的理解が可能ということになる．但しこの理論はまだ発展途上で，そのダイナミクスもまだ十分には分かっていない．

このように，ミクロな世界のブラックホールは，まさに一般相対性理論と量子論の接点なのである．小さいブラックホールでは，量子論が重要となり，ブラックホールの蒸発という予想しない現象が現れた．それによってブラックホールの熱力学的解釈が可能となり，そのことはミクロなブラックホールの量子統計力学的理解の必要性を示唆しており，その解明は，まだ完成していない「量子重力理論」という究極理論を探る手がかりを与えると信じられている（第16章参照）．

参考文献

1) S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **25** (1972) 152.
2) W. Israel, *Phys. Rev.* **164** (1967) 1776; *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 245.
3) B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1970) 331.
4) S.W. Hawking, The event horizon, in *Black Holes* ed. by C. De Witt and B.S. De Witt (1973, New York, Gordon and Breach) p.5; S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of spacetime* (1973, Cambridge Univ. Press).

5) D.C. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 905.
6) R. Penrose, *Nuovo Cimento* **1** (1969) 252.
7) G.D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics* (1923, Harvard Univ. Press).
8) R. Emparan and H.S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 101101.
9) D. Christodolou, *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 1596; D. Christodolou and R. Ruffini, *Phys. Rev.* **4** (1971) 3552.
10) J.D. Beckenstein, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333.
11) J.M. Bardeen, B. Carter and S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161.
12) L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 562; *Phys. Rev.* **183** (1969) 1057.
13) Ya. B. Zel'dovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **62** (1972) 2076; A.A. Starobinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **64** (1973) 48.
14) S.W. Hawking, *Nature* **248** (1974) 30; *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
15) J.D. Beckenstein, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292.
16) 安孫子誠也『アインシュタイン 相対性理論の誕生』（講談社，2004）p.37.
17) A. Strominger and C. Vafa, *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99; G.T. Horowitz, "The Origin of Black Hole Entropy in String Theory", in Proceedings of the Pasific Conference on *Gravitation and Cosmology*, (Seoul, 1996) (gr-qc/9604051); 細道和夫「ブラックホールのエントロピー」，数理科学：特集「場の量子論」（1998 年 2 月号）p.51（サイエンス社）(別冊・数理科学（1999 年 4 月号）「場の理論」に再録).
18) C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 3288; C. Rovelli, *Quantum Gravity* (2004, Cambridge Univ. Press).

第 15 章
基本定数が変化する？

アインシュタインの一般相対性理論は，90 年間以上にもわたって，すべての検証実験をパスしている．では一般相対性理論以外にこれまでの観測や実験と矛盾しない重力理論はないのであろうか？ この章では一般相対性理論の「代替理論」とも呼ばれるいくつかの重力理論を紹介し，それが予言する基本定数の時間変化の可能性および観測や実験からの制限について述べよう．

15.1 スカラー・テンソル重力理論

現代の理論では基本的な力は基本粒子のやりとりによって働くと考えられている．巨視的な基本相互作用（長距離力）である重力はスピン 2 の重力子が，電磁気的な力はスピン 1 の光子が媒介することにより働くことがわかっている．ではスピン 0 のスカラー粒子が媒介する力は存在しないのであろうか？ 一般相対性理論が提唱される前は，重力を記述するのはスカラー場（重力ポテンシャル）と考えられていたし，ニュートン重力の相対論化を考える際も実際にスカラー重力理論が検討されたこともあったが（第 2 章），スカラー場のみでは重力は記述できないことがわかっている．しかし，計量とスカラー場が共存する重力理論は一般相対性理論を拡張する理論として考えることができる．そのような理論をスカラー・テンソル重力理論と称し，その代表格がブランス・ディッケ重力理論である．

15.1.1 ブランス・ディッケ重力理論[1)]

一般相対性理論をつくるときにアインシュタインの頭に常にあったのが「マッハの原理」である．マッハ（E. Mach）はニュートン力学を再解析し，慣性は物体固有のものではなく，宇宙全体の物質分布が影響すると考えた．一般相対性理論は，宇宙の物質分布が局所的な時空構造を決めるという意味では，このマッハの原理の思想を受け継いでいると考えられる．しかしながら物体そのものの慣性を決めるわけではないからマッハの原理を実現する理論ではない．

物体の質量 m を直接測定することは難しく，通常重力加速度 Gm/r^2 を測定することで決定される．この場合，いつも Gm の形で現れるので，G が普遍定数ではなく宇宙の物質と相互作用するスカラー場の平均値とみると，このマッハのアイデアが実現されるというのがブランス（C. Brans）とディッケ（R.H. Dicke）の考えだ[1]．スカラー場が宇宙の物質と相互作用する形として最も簡単なものは

$$\Box\phi = 4\pi g T \tag{15.1}$$

という方程式で表される．ここで g は結合定数, $T = T^\mu_\mu$ は物質場のエネルギー・運動量テンソルのトレースである．宇宙の密度を臨界質量（$\rho_{\rm cr} \sim 10^{-29}{\rm g/cm}^3$）とし，宇宙の大きさを現在の地平線半径（$R_H \sim 10^{28}{\rm cm}$）にとり，(15.1) 式の次元解析を行うと，$\langle\phi\rangle \sim 4\pi g \rho_{\rm cr} R_H^2 \sim g \times 10^{28}{\rm g/cm}$ となる．$g \sim O(1)$, $1/G \sim 1.35 \times 10^{28}{\rm g/cm}$ であるので，$\langle\phi\rangle \sim 1/G$ と考えると，都合が良さそうである．その結果，重力方程式は

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi}\left(T_{\mu\nu} + T^{(\phi)}_{\mu\nu}\right) \tag{15.2}$$

となる．

ここで，弱い等価原理は成り立つと考えると，物体の運動は計量 $g_{\mu\nu}$ のみに依存し，スカラー場 ϕ によらない．その結果，物体のエネルギー・運動量テンソルはそれ自身で保存しなければならない（$T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$）．ビアンキ恒等式を用いると $T^{(\phi)}_{\mu\nu}$ は次のように決定できる[2)*1)]．

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\omega_{BD}}{\phi}\left(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) + (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box\phi)\right]. \tag{15.3}$$

ここで $\omega_{BD}(\equiv 1/g - 3/2)$ はブランス・ディッケパラメータと呼ばれる．

上の方程式 (15.1) (15.2) は，作用

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi}\left(\phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi}(\nabla\phi)^2\right) + L_m\right] \tag{15.4}$$

の変分から得られるが，この普遍的なスカラー場と計量テンソルを含む重力理論はブランス・ディッケ理論と呼ばれる．ここで物質場のラグランジアン L_m にはスカラー場 ϕ は含まれない．その結果，ブランス・ディッケ理論は弱い等価原理を満足する．弱場近似でブランス・ディッケ理論における粒子の軌道を考えると，

$$G = \left(\frac{2\omega_{BD} + 4}{2\omega_{BD} + 3}\right)\frac{1}{\phi} \tag{15.5}$$

であることが示され，重力定数はスカラー場 ϕ の逆数で表されることがわかる．

---

*1) $T^{(\phi)}_{\mu\nu}$ は $\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}$ および $\phi_{;\mu;\nu}$ から構成されると仮定している．

表 15.1 自然界に現れる巨大数．ρ_{cr} は宇宙の臨界密度，$R_H(\sim H_0^{-1})$ は現在の宇宙の地平線半径，m_e, m_p は電子と陽子の質量．

宇宙の総粒子数 $= \frac{\rho_{\mathrm{cr}} R_H^3}{m_p}$	$\sim 10^{80}$
$\frac{\text{宇宙の大きさ}}{\text{素粒子の大きさ [電子のコンプトン波長]}} = \frac{R_H}{\hbar/(m_e c)}$	$\sim 10^{40}$
電子・陽子間に働く $\frac{\text{クーロン力}}{\text{重力}} = \frac{e^2}{G m_e m_p}$	$\sim 10^{40}$
$\frac{\text{素粒子の大きさ [古典電子半径]}}{\text{プランク長}} = \frac{e^2/(m_e c^2)}{(\hbar G/c^3)^{1/2}}$	$\sim 10^{20}$
$\frac{\text{宇宙の光子数}}{\text{宇宙のバリオン数}}$	$\sim 10^{10}$

15.1.2 ディラックの巨大数仮説[3)]

上のブランス・ディッケ理論はディラック（P.A.M. Dirac）の唱えた巨大数仮説[3)] を実現する具体的なモデルとしても注目される．エディントン（A.S. Eddington）が初めに指摘したことであるが，自然界に現れる基本定数や宇宙に関連した量を無次元化すると $10^{10}, 10^{20}, 10^{40}, 10^{80}$ といった非常に大きな数（巨大数）が現れる（表 15.1 参照）[3,4)]．

ディラックは，このような大きな数の起源は宇宙年齢と関係していると考え，「基本定数」が時間とともに変化するのが原因であると主張した．光速やプランク定数，素電荷などは時間変化すると原子物理学や原子核物理学を再構成しなければならなくなり，それを避けるためディラックはニュートンの万有引力定数 G が時間変化するとした．$G, \hbar, c$ とハッブル定数 H_0 から質量の次元を持った量をつくると $(\hbar^2 H_0/Gc)^{1/3}$ が得られる．この値 $(\sim 100\mathrm{MeV})$ はおよそ π 粒子の質量ぐらいで，変化しないだろうと考え，ディラックは $G \propto H(= \dot{a}/a)$ と仮定した．ここで H はハッブル膨張率で $1/t$ のように変化する．その結果，重力定数も $G \sim 1/t$ のように時間とともに小さくなる．重力がクーロン力よりも何桁も小さいのは宇宙年齢が非常に大きいことの現れであることになる．

ブランス・ディッケ理論では，重力定数 G は物理的変数（スカラー場 ϕ）で表されるため，時間的に変化し得る．その結果，宇宙の進化によってディラックの巨大数仮説を実現する理論となり得る．$G \propto 1/\phi$ であるから，現在の G の時間変化率は $(\dot{G}/G)_0 = -(\dot{\phi}/\phi)_0$ で与えられる．その結果現在の宇宙膨張がべき的であれば $(\dot{G}/G)_0 \sim 1/t_0$ となるはずである．ところが，$(\dot{G}/G)_0$ には観測的な制限が与えられており，

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0 = \begin{cases} (4 \pm 9) \times 10^{-13} \quad \text{年}^{-1} \quad [\text{月面レーザー測量}^{5)}], \\ (4 \pm 5) \times 10^{-12} \quad \text{年}^{-1} \quad [\text{連星パルサー}^{6)}] \end{cases} \tag{15.6}$$

となっている．これは，宇宙年齢が $H_0^{-1} \sim 10^{10}$年 であるから上記の予想より1桁以上きつい制限になっており，ディラックの単純なモデルは 否定される．

重力定数以外の基本定数が時間的に変化する可能性はいろいろな観測によってより強い制限を受ける．表 15.2 に観測および実験結果をまとめておく[7)]．

表 15.2 基本定数の時間変化率に対する観測的制限．初めの $z = 0$ の場合以外は赤方偏移 z の過去から現在まで一様に変化したとしたときの変化率．

基本定数（X）	時間変化率に対する制限 ($\dot{X}/X$ [年 $^{-1}$])	赤方偏移(z)	測定方法
微細構造定数 ($\alpha = e^2/\hbar c$)	$< 30 \times 10^{-16}$	0	長期間にわたる原子時計の比較[8)]
	$< 0.5 \times 10^{-16}$	0.15	オクロ天然原子炉[9)]
	$< 3.4 \times 10^{-16}$	0.45	隕石（^{187}Re の崩壊[10)]）
	$< 1.2 \times 10^{-16}$	0.4–2.3	遠方クェーサーのスペクトル[11)]
弱い相互作用 ($\alpha_W = G_F m_p^2 c/\hbar^3$)	$< 1 \times 10^{-11}$	0.15	オクロ天然原子炉[9)]
	$< 5 \times 10^{-12}$	10^9	宇宙初期の元素合成[12)]
電子・陽子の質量比(m_e/m_p)	$< 3 \times 10^{-15}$	2.6–3.0	遠方クェーサーのスペクトル[13)]

表 15.2 の結果は時間変化に対する上限で，時間変化がないとしても矛盾しない．しかし，時間変化が存在すると主張する観測結果も得られている．ウェブ（J. Webb）たちは 1999 年に，$0.5 < z < 3.5$ にある遠方クェーサーからの Mg や Al などの元素の吸収線を観測し，微細構造定数（$\alpha = e^2/\hbar c$）が昔は小さかったと主張している[14)]．具体的には $\Delta\alpha/\alpha = (-0.72 \pm 0.18) \times 10^{-5}$ のように有意な変化が見られるというわけだ．これを時間変化に換算すると $\dot{\alpha}/\alpha = (6.4 \pm 1.4) \times 10^{-16}$ 年 $^{-1}$ である．しかしながら，表 15.2 にもあるようにより最近の観測では，$0.4 < z < 2.3$ で $\dot{\alpha}/\alpha = (-0.6 \pm 0.6) \times 10^{-16}$ 年$^{-1}$ のように否定的である[11)]．

15.1.3 スカラー・テンソル重力理論

一般相対性理論完成後，普遍的なスカラー場の存在を考えたのはブランス・ディッケが初めてではない．ジョルダン（P. Jordan）は 5 次元時空を 4 次元に埋め込んだときに現れるスカラー場によって，ディラックの提唱した重力定数の時間依存性が説明可能であることを示している[15)]．これは電磁場と重力場を幾何学的に統一するために 5 次元時空に拡張したカルツァ・クライン理論[16)]において電磁場を落としたものに対応している．5 次元から 4 次元時空に次元縮小する際には，物質のラグランジアンにスカラー場 ϕ の寄与が入るが，ブランスとディッケは，弱い等価原理を満足させるため，そのような結合は考えていない*2)[1, 17)]．

ブランス・ディッケ理論ではスカラー場と計量の結合の仕方が限定されていたが，結合定数 ω_{BD} をスカラー場の任意関数 $\omega(\phi)$ に拡張すると，より一般的になる．具体的には作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi}\left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}(\nabla\phi)^2 - \phi^2 V(\phi)\right) + L_m\right] \quad (15.7)$$

*2) ブランス・ディッケ理論をジョルダン・ブランス・ディッケ理論とも呼ぶ．

で表される．ここでは一般的にポテンシャル $V(\phi)$ も導入されている．このような理論を一般にスカラー・テンソル理論と呼ぶ[18~20]．

ブランス・ディッケ理論ではスカラー場のポテンシャルは導入しないが，それははじめに述べた長距離力の考えに反するからである．しかし，このことは次に示すように観測や実験から大きな制限を受ける．

15.2 PPN 形式

第 5 章でアインシュタイン理論が太陽系近傍の観測・実験で正しいことが確かめられたと述べた．スカラー・テンソル理論も同じように太陽系近傍の観測・実験で検証できると予想される．そのためにアインシュタイン理論を拡張した重力理論において光の屈折や時間の遅れがどのようになるかを計算しておかなければならない．そのために考えられたのが PPN 形式である[7,21]．

太陽近傍のような弱い重力場では第ゼロ近似でニュートン重力が成り立つ．もちろん相対論的効果は観測可能な量になるが，それらは摂動として扱うことができる．重力場が計量で記述できる理論は，その計量を $\epsilon^{1/2}(\sim v/c \sim \sqrt{|\phi_N|/c^2})$ のべきで展開し，ニュートン重力からのずれを表す．これをポストニュートン近似と呼ぶ．一般相対性理論であればその展開係数は物質分布によって一意的に決定される．しかし異なる重力理論では，異なる展開係数が得られ，同じ物質分布でも異なる相対論的効果を示すであろう．その係数をパラメータを使って表すことで，重力理論を限定しなくても観測からそのパラメータに制限を付けることができる．このようなアプローチを PPN (Parametrized Post Newtonian) 形式と呼ぶ．具体的には，標準 PPN ゲージで座標選択の自由度を固定し，準大域的ローレンツ座標系を用いて，計量を次のように表す．

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi\phi_W + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\phi_1 \\
&\quad + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\phi_2 + 2(1 + \zeta_3)\phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\phi_4 \\
&\quad - (\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{A} - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2 U - \alpha_2 w^i w^j U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1)w^i V_i \\
&\quad + O(\epsilon^3), \\
g_{0j} &= -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_j - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_j \\
&\quad - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w_j U - \alpha_2 w^i U_{ij} + O(\epsilon^{5/2}), \\
g_{ij} &= (1 + 2\gamma U)\delta_{ij} + O(\epsilon^2).
\end{aligned}
\tag{15.8}
$$

ここで，$U(= -\phi_N)$, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, V_j, W_j は物質分布や速度によって決まる次のような「ポテンシャル」である．

$$
U = \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \quad U_{ij} = \int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3},
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_W &= \int d^3\boldsymbol{r}' d^3\boldsymbol{r}'' \rho(\boldsymbol{r}',t)\rho(\boldsymbol{r}'',t)\,\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cdot\left[\frac{(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''|}-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\right],\\
\phi_1 &= \int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)\,\boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\quad \phi_2=\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)U(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\\
\phi_3 &= \int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)\varepsilon(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\quad \phi_4=\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{P(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\\
\mathcal{A} &= \int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)[\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3},\\
V_j &= \int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)v_j(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\\
W_j &= \int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)\,[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}',t)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\,(x_j-x_j')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}.
\end{aligned}
\tag{15.9}
$$

また，$\rho, P, \varepsilon, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ はそれぞれ局所慣性系における物質の静止質量密度，圧力，固有内部エネルギー密度，物質の速度場，PPN 座標系の宇宙静止系（宇宙背景輻射の静止系）に対する速度である．この計量の展開係数に現れる $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma, \xi, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ が PPN パラメータと呼ばれる．

γ は重力源によってどの程度時空が曲げられるかを表す量で，β はニュートンポテンシャル U の 2 次の係数であることからわかるように重力の非線形度を表す．一般相対性理論ではどちらも 1 である．ξ は選択した場所の効果，つまり銀河分布によって引き起こされる局所的重力定数の非等方性（ホワイトヘッド効果）を表す．$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は選択した座標系の効果により現れる．$\alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ は全運動量の保存則の破れに関する項である．全運動量保存則が成り立つ理論（$\alpha_3, \zeta_1 \sim \zeta_4 = 0$）を半保存重力理論と呼び，さらに全角運動量保存則も成り立つような理論（$\alpha_1 \sim \alpha_3, \zeta_1 \sim \zeta_4 = 0$）を全保存重力理論と呼ぶ．半保存重力理論では $\gamma, \beta, \xi, \alpha_1, \alpha_2$ の非自明な PPN パラメータを持ち，全保存重力理論では γ, β, ξ だけが意味のある PPN パラメータとなる．

PPN パラメータは重力理論を決めると決定される．スカラー・テンソル理論の場合は次のような関係がある（ϕ_0 は現在の値）．

$$
\begin{aligned}
&\gamma = \frac{1+\omega(\phi_0)}{2+\omega(\phi_0)},\quad \beta = 1+\left[\frac{3+2\omega(\phi_0)}{4+2\omega(\phi_0)}\right]\left(\frac{d\omega}{d\phi}\right)_{\phi_0},\\
&\xi = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{15.10}
$$

PPN 形式の良いところは，具体的な重力理論を決めなくても，パラメータで表された計量を使って相対論的効果を計算できる．そして相対論の検証実験からそれらのパラメータに制限を付ければ，自動的にいろいろな重力理論のパラメータに制限を与えることができる点である．例えば

$$
\delta\varphi \approx \frac{(1+\gamma)}{2}\times\delta\varphi_{\mathrm{GR}}\quad [\text{光の屈折}], \tag{15.11}
$$

$$
\delta t \approx \frac{(1+\gamma)}{2}\times\delta t_{\mathrm{GR}}\quad [\text{シャピロ遅延}], \tag{15.12}
$$

表 15.3 PPN パラメータに対する観測的制限.

PPN パラメータ	観測結果	相対論的効果
$\gamma - 1$	$(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$	時間の遅れ（カッシーニ衛星）[22]
	$(-1.7 \pm 4.5) \times 10^{-4}$	光の屈折（VLBI）[23]
$\beta - 1$	絶対値 $< 3 \times 10^{-3}$	近日点移動[24]
	$(1.1 \pm 1.1) \times 10^{-4}$	ノルトヴェート効果[7,25]
ξ	絶対値 $< 10^{-3}$	地球潮汐[7]

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta) \times \Delta\omega_{\rm GR} \quad [近日点移動] \tag{15.13}$$

である．添え字に GR とあるのは一般相対性理論から予想される値である．よって非常に精密な観測実験を行うことで，PPN パラメータに制限を付けることができる．

観測結果を図 15.1 と表 15.3 にまとめてある[7]．図 15.1 には光の屈折とシャピロ遅延の観測による γ に対する制限が示されている．最も強い制限は土星に向かっていたカッシーニ衛星のドップラー追跡における時間の遅れの測定から得られるもので，$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ の制限が得られている．この制限をスカラー・テンソル理論に当てはめると $\omega(\phi_0) = \omega_{BD} > 40,000$ という条件が得られる．$\omega \to \infty$ で理論は一般相対性理論に一致するので，少なくとも現在ではスカラー・テンソル理論も極めて一般相対性理論に近いことになる．

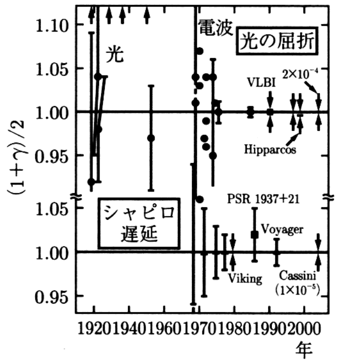


図 15.1 光の屈折とシャピロ遅延に対する観測結果[7]．(C. M. Will, *Living Rev. in Relativity* **9** (2006) 3, Fig. 5 より．）最も精度の良いのが，それぞれ VLBI 観測[23]とカッシーニ衛星実験[22]である．一般相対性理論は $\gamma = 1$ を予言する．

15.3 その他の重力理論

ここで考えたスカラー・テンソル理論以外にもいろいろな重力理論が提案されては消えていった（第 5 章）．生き残っているもう一つの理論にベクトル・テンソル理論がある．これは計量以外に時間的なベクトル場 u^μ による普遍的な相互作用を加えるもので，このベクトルに拘束条件を与えるかどうかで 2 つのタイプに分かれる．拘束条件として $u_\mu u^\mu = -1$ とするものをアインシュタイン・エーテル理論と呼ぶ[26]．これらの理論の作用は次のような形で与えられる．

$$S_g = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[(1 + \omega u_\mu u^\mu)R - K^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\nabla_\mu u^\alpha \nabla_\nu u^\beta + \lambda(u_\mu u^\mu + 1)\right]. \tag{15.14}$$

ここで

$$K^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta} = c_1 g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + c_2 \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + c_3 \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha - c_4 u^\mu u^\nu g_{\alpha\beta}\,, \tag{15.15}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 は任意定数，λ はラグランジュの未定定数である．拘束条件のない理論（$\lambda = 0$）では ω がさらに任意定数として加わり，アインシュタイン・エーテル理論では $\omega = 0$ とおくことができる．

このような理論も弱場近似ではPPN形式で表すことができ，理論に含まれるパラメータは観測による制限がつく．例えば，アインシュタイン・エーテル理論では $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\xi = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0$, $\alpha_1 = -8(c_3^2 + c_1c_4)/(2c_1 - c_1^2 + c_3^2)$, $\alpha_2 = (c_1 \sim c_4$ の複雑な代数式) となる．また，重力波の振動数が実であることやエネルギーの正定値性などの理論の整合性から $c_1/(c_1+c_4) \geq 0$, $(c_1 + c_2 + c_3)/(c_1 + c_4) \geq 0$, $c_1 > 0, c_1 + c_4 > 0, c_1 + c_2 + c_3 > 0$ という条件が課される[27)]．PPN パラメータの制限はこの理論のパラメータ $c_1 \sim c_4$ に制限を与える．しかしながら $c_2 = (-2c_1^2 - c_1c_3 + c_3^2)/3c_1$, $c_4 = -c_3^2/c_1$ を満たせば，すべての PPN パラメータは一般相対性理論の場合に一致し，観測的制限はつかず，2つの自由なパラメータが残ることになる[*3)]．

このようにアインシュタイン理論を拡張・修正する理論は山ほど提案されているが，精密な観測や実験の結果は一般相対性理論をますます支持する方向に収束していっている．それならばもう一般相対性理論でいいではないかと考えるかもしれない．しかしながら素粒子統一理論が正しいとすると，重力理論が一般相対性理論であるというのはそれほど必然的ではなく，重力の強い場合に大きな違いが出てくる可能性を示す．

参考文献

1) C. Brans and R.H. Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925.
2) S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1973).
3) P.A.M. Dirac, *Nature* **139** (1937) 323; *Proc. Roy. Soc.* **A165** (1938) 199.
4) A.S. Eddington, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **27** (1931) 15; R.H. Dicke, *Science* **129** (1959) 621; *Nature* **192** (1961) 440; S. Hayakawa, *Prog. Theor. Phys.* **33** (1965) 538.
5) J.G. William, S.G. Turyshev, and D.H. Boggs, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 261101.
6) V.M. Kaspi, J.H. Taylor, and M.F. Ryba, *Astrophys. J.* **428** (1994) 713.
7) C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge Univ. Press, 1993); *Living Reviews in Relativity* **9** (2006) 3.
8) H. Marion *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 150801; S. Bize *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 150802; M. Fischer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 230802; E. Peik *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 170801.
9) T. Damour and F. Dyson, *Nucl. Phys. B*, **480** (1996) 37; Y. Fujii, *Lecture Notes in Physics* **648** (Springer, 2004) 167; Yu.V. Petrov *et al.*, *Phys. Rev.* **C74** (2006) 064610.
10) K.A. Olive *et al.*, *Phys. Rev.* **D69** (2004) 027701.

---

*3) $c_3 = c_4 = -c_1$ の場合も $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ となり，一般相対性理論と同じ PPN パラメータを与え，2つの自由なパラメータが残る．しかしながらこの場合はスピン 0 やスピン 1 の波の速さが無限に発散するなど病的なことが起こる．

11) R. Srianand *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 121302; H. Chand *et al.*, *Astron. Astrophys.* **430** (2005) 47.
12) R.A. Malaney and G.J. Mathews, *Phys. Rep.* **229** (1993) 147; H. Reeves, *Rev. Mod. Phys.* **66** (1994) 193.
13) A. Ivanchik *et al.*, *Astron. Astrophys.* **440** (2005) 45.
14) J. Webb *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 884; M.T. Murphy *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327** (2001) 1208.
15) P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1955); *Z. Phys.* **157** (1959) 112.
16) Th. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.* (1920) 966; O. Klein, *Z. Phys.* **37** (1926) 895.
17) M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **29** (1956) 128.
18) P.G. Bergmann, *Int. J. Theor. Phys.* **1** (1968) 25.
19) R.V. Wagonar, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 3209.
20) Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge Univ. Press, 2002).
21) K. Nordtvedt, *Phys. Rev.* **169** (1968) 1017; C.M. Will, *Astrophys. J.* **163** (1971) 611.
22) B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature* **425** 374.
23) S.S. Shapiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 121101.
24) I.I. Shapiro, "Solar system tests of general relativity: Recent results and present plans", in *Proceedings of the 12th International Conference on General Relativity and Gravitation*, (Cambridge Univ. Press, 1990) 313.
25) K. Nordtvedt, *Phys. Rev.* **169** (1968) 1014.
26) T.A. Jacobson and D. Mattingly, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 024028; *Phys. Rev.* **D70** (2004) 024003; C. Eling and T.A. Jacobson, *Phys. Rev.* **D69** (2004) 064005.
27) B.Z. Foster and T.A. Jacobson, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 064015.

第 16 章
超ミクロな世界の重力

これまで見てきたようにアインシュタインの一般相対性理論は様々な強い重力現象を極めて正確に記述している．理論としてはこれほど美しく興味深いものはない．しかしながら，重力の量子効果も重要となる超ミクロなスケールでは一般相対性理論を超える新しい重力理論を構成する必要があるだろう．

16.1 重力場の正準量子化

近年の自然科学における大きな進展はなんといっても 20 世紀の量子論と相対論であろう．そのうちでも量子論は，古典物理学における決定論的世界観がミクロスケールにおいては適用できないことを明らかにし，人類の自然に対する認識を根本的に変えた．

量子力学の進展は相対論的効果が重要となる領域にまで拡張され，粒子の生成・消滅を取り扱うことのできる場の量子論となった．それはまた，素粒子物理学として発展していった．重力も物理学的観点からは「場」と考えることができるので，当然，その量子論をつくる試みが行われた．実際 1930 年以降，重力場を量子化しようと非常に多くの試みが行われている[1)]．

その際に考えられる最も簡単な状況は，重力場が非常に弱く線形近似のできる場合である．計量をミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ から少しゆらいでいるとして

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{16.1}$$

とおく．$h_{\mu\nu}$ の 1 次までの近似でアインシュタイン方程式を考えると，時空のゆらぎを表す重力波の線形方程式が得られる（第 7 章）．この線形化された理論は従来の場の量子論の方法で容易に量子化可能で，電磁場で光子が現れるように，線形重力場を量子化をすると重力子が得られる．問題は相互作用を考えたときに生ずる．重力理論を記述するアインシュタイン・ヒルベルト重力作用

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4 x R[g(x)] \tag{16.2}$$

を $h_{\mu\nu}$ に関して展開すると，線形重力場の作用は 2 次の項で記述され，3 次以上の項がその自己相互作用を表すと考えられる．このような相互作用のある理論を通常の場の量子論の方法で量子化すると，散乱振幅などが発散積分となる．電磁場を量子化した量子電磁気学においても同じである．それで朝永らは，「くりこみ」という手法を考え出した．量子電磁気学などでは，この「くりこみ」操作を用いると観測される物理量を有限にすることができる．しかし，重力場の場合，くりこみ不可能な発散が現れるのである．つまり，アインシュタイン理論は（少なくとも弱重力場展開において）くりこみ不可能で，通常の場の量子論が適用できないのである．

ここで少し歴史を振り返ろう[2]．アインシュタインは，1916 年の一般相対性理論の解説の中で「量子論はマックスウェルの電気力学を修正するだけでなく，新しい重力理論（一般相対性理論）も修正しなければならない」と述べている[3]．その後，彼は，量子現象の古典的解釈を探すことに興味をそそられて統一場の理論の研究を行っている．量子力学は不完全なものと信じ，量子力学の定式化を重力場に適用することは他の研究者に任せたのである．

ハイゼンベルク（W. Heisenberg）とパウリ（W. Pauli）は，相対論的場の量子論を展開した論文の中で「重力場の量子化は，ここで行われた方法で，困難なくできるだろう」と楽観的にいっている[4]．ローゼンフェルト（L. Rosenfeld）は実際にこの定式化を線形重力場に適用し，「重力子」ということばを導入した[5]．その後，ブロンシュタイン（M.P. Bronsteyn）はこの線形量子重力理論を解析し，批判している[6]．彼は，量子化された重力場の観測可能性の問題点をあげ，不確定性原理に加え，一般相対性理論では，線形化されたアフィン接続成分の測定精度に「絶対的限界」があると主張した．彼は，「場の量子論の定式化を適用することは量子論と重力の望むべき融合をもたらさない．リーマン幾何学の排除…そしておそらく，時間や空間の通常概念の否定といった理論の根本的再構成を行い，もっと深淵でまったく新しい概念によって理論を構成しなければならない」と主張している[6]．

1930 年代半ばは，量子重力の問題は，すでにある概念や場の量子論の方法を重力場の方程式またはその修正されたものに適用する方法を見つける問題と考えていた「保守派」と，重力は何か特別な性質を持っており，それが一般相対性理論や量子力学における基本的概念の変更を示唆していると考える「急進派」の間に一線が引かれ，混迷を深めていた．

しかし，1950 年代の頃には，ベルグマン（P.G. Bergmann）のグループ[7]，ディラック（P.A.M. Dirac）[8]，そしてアーノウィット（R. Arnowitt），デサー（S. Deser），ミズナー（C.W. Misner）たち[9]の努力で，量子重力問題に対する興味がよみがえることになる．彼らは，空間的超曲面の適切な族を選び出し，こ

れらの3次元超曲面の時間発展に対し，ハミルトン形式を適用し，正準量子化の方法を調べた．この方法はADM形式と呼ばれ，後に数値計算（数値相対論）にも応用され，時空のダイナミクスを議論する基準となっている（第13章）．

少しおさらいをしよう．時空を時間一定の3次元超曲面族で張る．時刻 t における超曲面 $\Sigma[t]$ の計量を γ_{ij} とすると，計量は一般に

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \tag{16.3}$$

のように分解される．ここで α, β^i はそれぞれラプス関数，シフトベクトルで，座標系をどのように取るかというゲージ自由度を表している．このとき，アインシュタイン・ヒルベルト重力作用 (16.2) は

$$S_{EH} = \int d^4x \left[\dot{\gamma}_{ij}\pi^{ij} - \alpha\mathcal{H} - \beta^i\mathcal{H}_i\right] \tag{16.4}$$

と表される．ここで π^{ij} は γ_{ij} の共役運動量を表す*1)．また $\mathcal{H}$ および $\mathcal{H}^i$ はアインシュタイン方程式の拘束条件に関係する項で，

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa^2}\overset{(3)}{R}, \quad \mathcal{H}^i = -2D_j\pi^{ij} \tag{16.5}$$

で与えられる．ここで，$\overset{(3)}{R}$ は γ_{ij} からつくられるスカラー曲率である．この作用の変分から $\mathcal{H}=0$, $\mathcal{H}^i=0$ が得られるが，これは拘束条件そのものである*2)．このような条件が現れる理由は，形式的には系のラグランジアンが α および β^i の時間微分を含まないからであるが，物理学的にはそれらがゲージ自由度に対応しており，ダイナミカルな自由度を表していないことによる．

このように重力場を量子化するためには，ディラックが考えたような拘束条件付きの量子化を行わなければならない．いまの場合，量子状態を記述する波動関数を Ψ とすると

$$\mathcal{H}\Psi = 0, \quad \mathcal{H}^i\Psi = 0 \tag{16.6}$$

を満たす状態が物理的に許されることになる．また，系のハミルトニアン H は $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}^i$ の線形結合で表されるため，シュレディンガー方程式は $H\Psi = 0$ となり，波動関数 Ψ は時間を含まない．いま宇宙論を考えると，空間の並進対称性から運動量拘束条件は自明になる．残された解くべき非自明な方程式 $\mathcal{H}\Psi = 0$ を特にホイラー・ドウィット（Wheeler-De Witt）方程式と呼ぶ．

このホイラー・ドウィット程式を用いて，1980年代には量子宇宙論が大いに議論された．ハートル（J. Hartle）やホーキング（S.W. Hawking）の無境界境界条件を用いた「宇宙誕生シナリオ」[10]やビレンキン（A. Vilenkin）による

*1） 第13章では運動量 π^{ij} の代わりに等価な外部曲率 K^{ij} を用いている．2つの変数の関係は，$\pi^{ij} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa^2}(K^{ij} - \gamma^{ij}K)$ で与えられる．

*2） 簡単のため物質場はないとする．

「無からの宇宙創生」[11]がまことしやかに語られた．宇宙論に限定しそのような議論が展開された背景には，もちろん宇宙の始まりを知りたいという人類の欲求があるからではあるが，宇宙論を考えることで，状態空間を有限自由度にし，計算可能なより簡単な系でまず議論しようという意図があった．これらの話は非常に面白いが，量子重力理論が完成していない段階で，どの程度もっともらしいかわからないのが現状である．

量子重力に正面から取り組む方法として，ファインマン（R.P. Feynman）は，量子電磁気学の成功後，特殊相対論的場の量子論の摂動テクニック（経路積分法）を一般相対性理論の場の方程式に適用した[12]．この方法では，重力場（計量）を背景ミンコフスキー計量との差と考え，特殊相対論的場として扱う．この場はアインシュタイン方程式と等価な非線形場の方程式に従うが，ローレンツ不変な理論である．その結果，アインシュタイン理論を特徴づける幾何学と重力の間の深い結びつきがこのアプローチでは失われる．量子重力に関する多くの研究が，このようなアプローチに沿ってなされてきた．しかし，アインシュタインの場の方程式は摂動的にはくりこみ可能でないということがわかったのである．そこで，正準形式を基盤にした量子重力理論を考えるには非摂動論的手法を開発しなければならなくなった．

そのような問題に正面から取り組んでいるのが，アシュテカ（A. Ashtekar）のグループである．はじめは，一般相対性理論をアシュテカ変数（接続係数と運動量の複素数的組み合わせ）を使って書き換え，重力場の量子化を試みていた[13]が，最近では，より新しい変数（上記 2 つの実数的組み合わせ）を用いた「ループ重力理論」を展開している[14]．この方法では，従来の拘束条件に加えて，ゲージ拘束条件が新たに出てくる．それを解くために接続係数に関連したホロノミー変数を導入するが，その際ループに沿った積分が現れる．そのループを用いて系の量子状態を記述する．また，このとき，波動関数がループの連続変形に対して不変であれば運動量拘束条件は満たされる．もっとも，他のアプローチ同様，ハミルトニアン拘束条件はそう簡単には解けず，そのまま状態を拘束する条件として残される．一方，ループ表現に現れる曖昧さを解決するため，「スピンネットワーク」による状態の記述が現在の理論の基礎となっている．

このループ重力理論では，理論に未知のパラメータ（イミルジ (Immirzi) パラメータ）を含むが，ブラックホールのエントロピーなど，強重力場における量子重力効果が計算可能であるということで，非常に注目された[15]．この未知パラメータは，大きなブラックホールの極限でブラックホールエントロピー S が地平線の表面積 A の 1/4 となる（ベケンシュタイン・ホーキング則 $S = A/(4G)$ を満たす）ように決める．またその理論は宇宙初期の特異点回避の問題にも応用され，ループ量子宇宙論として研究が始まっている[16]．

但し，この理論はまだ発展途上であり，多くの重要な未解決問題がある．そのなかでも重要な問題の一つは，古典極限で一般相対性理論に一致するかどうか

がまだわからないという点である．また，量子宇宙論同様に，時間にあたる変数を持たないので，時空のダイナミクスをどう記述するかは大きな問題である．

16.2 統一理論としての重力と量子化

重力を量子化する試みで現在の主流は，素粒子統一理論に基づくアプローチである．重力を特別視するのではなく，多くの基礎的な力の一つとして捉え，他の場といっしょに量子化を行おうというものである．その最有力候補は超紐理論である[17)]．それによると，重力子を含むすべての素粒子は，「紐」と呼ばれる 2 次元的実体の量子励起状態で表される．その結果，紐を量子化すれば，重力も量子化できるというわけである．

基本的相互作用，いわゆる「力」は現在 4 つ存在することが知られている．弱い相互作用や強い相互作用が発見される前は，重力と電磁気力だけが知られており，アインシュタインはその統一に生涯を捧げた．一般相対性理論は重力を幾何学的に記述する理論であるが，同じアイデアを電磁気力にも適用し，5 次元時空によって重力と電磁気力を統一しようとしたのが，カルツァ（Th. Kaluza）とクライン（O. Klein）であった[18)]．彼らは 5 次元計量を次のように表した[*3)]．

$$(g_{AB}) = e^{-\frac{\phi}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + e^{\sqrt{3}\phi} A_\mu A_\nu & e^{\sqrt{3}\phi} A_\mu \\ e^{\sqrt{3}\phi} A_\nu & e^{\sqrt{3}\phi} \end{pmatrix} . \tag{16.7}$$

この分解により，4 次元重力理論（計量 $g_{\mu\nu}$）と電磁気学（4 元ポテンシャル A_μ）の基礎方程式が得られるが，同時にスカラー場（ϕ）も基本場として含まれてくる（15.1.3 節スカラー・テンソル重力理論参照）．これは 5 次元目のスケールを表す．もしこの 5 次元方向が目に見えないほど小さければ，我々の空間は実質的に 3 次元になる．そのために 5 次元目は小さく丸まっていないといけない[*4)]（図 16.1 参照）．これをコンパクト化と呼ぶ．

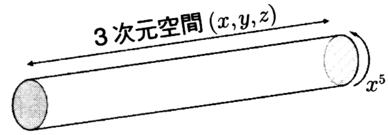


図 16.1 コンパクト化された 4 次元空間．

その後の素粒子物理学の進展で，基本相互作用には弱い相互作用，強い相互作用の 2 つが追加された．そのためにこのカルツァ・クライン理論はそのままでは正しくない．現在では，基本的な相互作用はゲージ理論として統一的に記述されている．実際，ワインバーグ（S. Weinberg）とサラム（A. Salam）は，電磁相互作用と弱い相互作用を，$SU(2) \times U(1)$ ゲージ群によって統一する電弱理論を提唱した．3 つの基本相互作用（電磁相互作用，弱い相互作用，強い

*3） ここでギリシャ添字（$\mu, \nu, \cdots$）は 4 次元時空の脚を，ラテン添字（$A, B, \cdots$）は 5 次元時空の脚を表す．

*4） 現在の高エネルギー実験と矛盾しないためには，余剰次元の大きさは 10^{-17}cm [$\sim (1\,\mathrm{TeV})^{-1}$] 以下でなければならない．

相互作用）は，より大きなゲージ群によって大統一理論として統一されている．そして素粒子論はさらに統一対象を広げ，「粒子」（フェルミ粒子）と「力」（ボーズ粒子）をも統一する「超対称性理論」が現れた．それに重力を含めたものが「超重力理論」である．これらの統一理論において，現在知られている多くの素粒子を説明するには非常に多くの基本場を用意しなければならない．統一理論を考える場合はできるだけ少ない基本場で構成するのが理想的である．その結果，研究者達はより高い次元で理論を構成するという方向に進んだ．実際，(16.7) 式からわかるように，4 次元時空の重力場，電磁場，スカラー場の 3 種類は 5 次元の計量（重力場）一つにまとめられる．このように超重力理論はより高い次元でその可能な理論が探られた．そして 11 次元の超重力理論は，理論が完全に決定されるため，究極の統一理論として期待された．ホーキングはそのとき「理論物理学は終わった」とまでいった．

しかしながらこの理論は，現在知られている左右非対称なカイラル粒子を構成できないことがわかった．つまり統一理論失格である．そこで一つ次元の低い 10 次元超重力理論に興味の対象が移った．そして超紐理論が出現した．

それまでの場の理論では，基本構成要素は「点粒子」であり，量子効果を考えるとすぐに無限大の発散が現れた．その多くはくりこみにより除去できたが，重力だけはうまくいかなかった．そこで「点粒子」ではなく拡がりを持った「紐」を基本構成要素とする理論が考えられた．これが紐理論である．さらにそれに超対称性を持たせるように拡張したものが超紐理論というわけだ．

この紐は振動をするが，それをモード分解した一つ一つの固有振動が個々の粒子に対応する．つまり一本の紐が多くの粒子をまとめて記述する．統一理論には非常に適しているのである．さらに紐は拡がりを持つので，量子発散も起こりにくくなるという一石二鳥の性質を持つ．

固有振動を解析すると，標準理論に現れるゲージ場（重力以外の力）は開紐のモードに含まれる．また，閉紐のモードの一つに重力子（スピン 2 を持つ質量ゼロの粒子）を含むことがわかり，紐理論は重力も自然に内在することになる．その結果この紐を量子化すれば，重力も量子化できることになる．

ただし，これまでの量子化はミンコフスキー時空を伝播する紐の量子化に留まり，実際に興味ある重力の強い時空を量子論的に扱う方法はまだよくわかっていない．その結果，宇宙初期の特異点問題やブラックホール蒸発の運命に対してはっきりとした答えを与えるに至っていない．

その後，超紐理論で画期的な発見があった．ポルチンスキー（J. Polchinski）による D ブレイン解の発見である[19]．ポルチンスキーは，開いた紐の端点の集合体がソリトン的構造物として振る舞うことに気が付いた．逆に見ると，開いた紐の端はこの構造物に固定されていることになる．固定端の境界条件はディリクレ境界条件と呼ばれるので，この構造物を D ブレインと呼んだ．「ブレイン（brane)」は membrane（膜）から来ている．この D ブレインを用いると，

これまでまったく別の理論と考えられていた5つの超紐理論の間に対応関係の存在することが示され，さらにはそれらの超紐理論の大元と考えられる11次元の理論（M理論）の存在まで示唆されている（図16.2）．

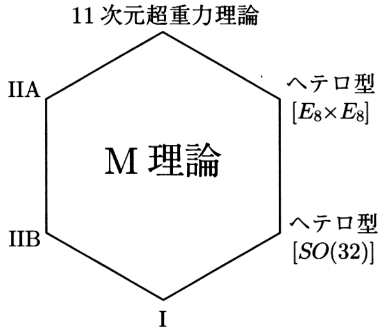


図16.2　5つの超紐理論は11次元の統一理論（M理論）にまとめられる．11次元超重力理論はその場の理論極限になっている．

またそのような状況で，重力場の量子化と直接関係ないかもしれないが，興味深い仮説が議論されている．AdS/CFT対応と呼ばれるものである[20]．AdSは反ドジッター（anti de Sitter）時空，CFTは共形場の理論（conformal field theory）の略である．AdS/CFT対応とは，おおざっぱに言って，「AdS_5を背景とする5次元重力理論」と「D_3ブレイン上の4次元共形場の理論」が等価であるという仮説である．つまり，5次元古典重力理論を解析することによって4次元の場の量子論のことがわかるという大胆な考えである．逆に4次元のゲージ理論の解析からそれに対応する境界を持つ5次元時空が決定されることになる．この仮説やさらに拡張した考えを使って，現在，興味深い研究がいろいろ行われている．例えば，量子色力学の強結合領域の解析を5次元重力の研究として行ったり，ブラックホールエントロピーの起源に関連させて場の量子論の解析が行われたりしている．この対応は，もし本当であれば，量子論誕生の時の「ボーアの対応原理」にあたるようなものかもしれず，新しい物理学の出現を予兆させる．

参考文献

1) A. Ashtekar and R. Geroch, *Rep. Prog. Phys.* **37** (1974) 1211.
2) J. Stachel, "相対性理論の歴史"「20世紀の物理学」第4章（前田恵一訳）（丸善，1999），p296.
3) A. Einstein, *Ann. Phys., Lpz.* **49** (1916) 769.
4) W. Heisenberg and W. Pauli, *Zeit. Physik* **56** (1929) 1.
5) L. Rosenfeld, *Ann. Phys., Lpz.* **5** (1930) 113.
6) M.P. Bronsteyn, *Phys. Z. Sowjetunion* **9** (1936) 140; *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **6** (1936) 140.
7) P.G. Bergmann *et al.*, *Phys. Rev.* **80** (1950) 81.
8) P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246** (1958) 333.
9) R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, "The dynamics of general relativity" in *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (Wiley, 1962) p.227.
10) J. Hartle and S.W. Hawking, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2960.
11) A. Vilenkin, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 509.
12) R.P. Feynman, *Acta Phys. Polon.* **24** (1963) 697.
13) A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2244; *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1587.
14) C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge Univ., 2004).

15) C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3288 (1996).
16) M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 5227; *Class. Quantum Grav.* **18** (2001) L109; **19** (2002) 2717.
17) J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge Univ. 1998).
18) カルツァ・クライン理論および宇宙論の代表的論文は T. Appelquist, A. Chodos, and P.G.O. Freund 編 *Modern Kaluza-Klein Theories* (Addison-Wesley, 1987) にまとめられている.
19) J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724.
20) O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Phys. Rep.* **323** (2000) 183.

第 17 章
一般化された重力理論

超紐理論は一般相対性理論を内在していた．その形はスカラー・テンソル重力理論で記述される．また紐の量子効果を考えると曲率高次項などが現れる．ここでは，そのような一般化された重力理論の統一的アプローチについて述べよう．

17.1 超紐理論と一般相対性理論

重力を含む統一理論として期待される超紐理論をそのまま解析するのは非常に難しい．では，場の理論が有効となる紐の構造が見えない低エネルギー極限ではどのような重力理論が得られるのであろうか？

紐理論の特徴は，紐のつくる 2 次元世界面における共形不変性である．いま D 次元時空を伝播する共形不変な紐の作用を考える[1)]（図 17.1 参照）．

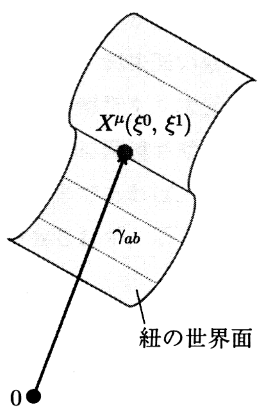


図 17.1　D 次元時空を伝播する紐のつくる世界面．

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi \left[\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}g_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \frac{1}{2}\epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\right]. \tag{17.1}$$

ここで，α' は紐張力の逆数，$X^\mu(\xi)$, $g_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$ はそれぞれ D 次元時空の紐の座標，計量，反対称テンソル場，ξ^a および $\gamma_{ab}(\xi)$ は 2 次元世界面の座標と計量である．これにスケール不変性を破るディラトン場 $\varPhi$ の作用項

$$S_\varPhi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\xi\sqrt{-\gamma}R(\gamma)\varPhi(X) \tag{17.2}$$

を付け加え，場の理論として量子効果を計算しエネルギー・運動量テンソルの

トレースゼロ条件を課す．$g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, Φ の各々の β 関数を計算することで，場の理論極限でどのような基礎方程式が得られるかがわかる[1]．具体的には

$$S = \int d^D X \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right] \tag{17.3}$$

が得られる．$H_{\mu\nu\rho}$ は $B_{\mu\nu}$ からつくられる 3 階反対称テンソル場である．これはディラトンが普遍的なスカラー場となるので，スカラー・テンソル理論ともいえる．しかし，計量の再定義 $g_{\mu\nu} \to e^{4\Phi/(D-2)} g_{\mu\nu}$ を行うと，

$$S = \int d^D X \sqrt{-g} \left[R - \frac{4}{D-2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\frac{8}{D-2}\Phi} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right] \tag{17.4}$$

となる．驚くべきことに，紐理論の場の理論極限でアインシュタイン・ヒルベルト重力作用が得られるのである．(17.4) をアインシュタイン系，(17.3) をストリング系（またはジョルダン系）と呼ぶ．

第 15 章で一般相対性理論を拡張する理論としてスカラー・テンソル理論を考えたが，その理論は観測から大きな制限を受けると言った．一方，ここでは計量の再定義でその 2 つの理論が移り変わると主張している．これはどういうことであろうか？ 実は，この 2 つの理論を区別するには物質との相互作用がどう入るかをはっきりさせなければならない[*1]．(17.3) 式の作用に Φ を含まない物質場の作用を付け加えると，スカラー・テンソル理論になる．一方，(17.4) 式で表されるアインシュタイン系で物質場を考えるとスカラー場を含む一般相対性理論になる．もっとも後者としても，質量ゼロのスカラー場は発見されていないので，ディラトンは何らかの形で質量を持たなければならない．これは低エネルギースケールでディラトンの値を固定することに対応するので，2 つの理論には違いがなくなる．このように超紐理論は，一般相対性理論を内在するのである．

17.2 量子補正と重力理論

ミクロな現象を解析するときは，常にその量子効果を考える必要がある．重力を含む理論においてもいろいろな場の量子効果が重力の作用を変更する．発散を消すためにくりこみや正則化などを考えると宇宙定数 Λ やアインシュタイン・ヒルベルト重力作用 R に加えて，曲率高次の項（R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$）なども現れる[2]．これらの項は，一般に，2 階より高階の微分をもたらすため，その重力理論は一般相対性理論とはかなり異なった振る舞いを示す．

超紐理論を考えるとどうであろうか．1 ループの量子効果を考えた補正が場

---

*1) どの系が物理的に意味のあるものであるかという疑問に関しては多くの意見や考えがあるが，実際にいろいろな物理量を測定する場合に我々は粒子（例えば電子）の質量が一定であるとしている．そのため，そのような粒子の質量が一定になる系を物理的な系とするべきであろう．

表 17.1　紐理論と補正項の係数．II 型超紐理論では補正項は 4 次から現れる．

紐理論のタイプ	c_1	c_2	c_3
ボソン紐理論	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$
ヘテロティック紐理論	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
II 型超紐理論	0	0	$\frac{1}{8}$

の理論の極限でどうなるかという計算が行われており，紐理論のタイプによって補正項が異なることがわかっている．作用を結合定数のべきで

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + c_1 \alpha' e^{-2\Phi} L_2 + c_2 \alpha'^2 e^{-4\Phi} L_3 + c_3 \alpha'^3 e^{-6\Phi} L_4 + \cdots \right] \tag{17.5}$$

のように展開する．ここで $L_2, L_3, L_4, \cdots$ はそれぞれ曲率の 2 次，3 次，4 次，… を含む複雑な項である．表 17.1 には展開係数をまとめてある[3)]．

興味深い結果としては，曲率 2 次までを考えたときの補正はガウス・ボンネ項

$$L_2 = R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \tag{17.6}$$

という特別な形になり，高階微分を含まない．

ディラトンなどの場がない場合には，高階微分を含まない曲率高次の項はラブロック (D. Lovelock) によって一般的に求められており，時空の次元によってどこまでの項を含むかが決まってくる[4)]．例えば，D 次元時空であれば，$[(D-1)/2]$ 次までの曲率高次項からなるラブロック重力ラグランジアン

$$L_m^{(L)} = \frac{1}{2^m} \delta^{a_1 b_1 \cdots a_m b_m}_{c_1 d_1 \cdots c_m d_m} R_{a_1 b_1}{}^{c_1 d_1} \cdots R_{a_m b_m}{}^{c_m d_m} \qquad \left(m \le \left[\frac{D-1}{2} \right] \right) \tag{17.7}$$

を含む[*2)*3)]．ここで $\delta^{a_1 b_1 \cdots a_m b_m}_{c_1 d_1 \cdots c_m d_m}$ は $2m$ 個のクロネッカーデルタの積を完全反対称化したものである．例えば 5 次元では

$$L_g = \Lambda + \frac{1}{2\kappa^2} R + \alpha \left(R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \right) \tag{17.8}$$

が高階微分を含まない重力理論の一般的な形になる．

(17.5) 式の $L_3, L_4, \cdots$ には各次数のラブロック作用 (17.7) 以外にも新しい項が現れる．これらは運動方程式に高階微分を与える．

---

*2)　$[x]$ は x の整数部分をとるガウス記号．

*3)　0 次および 1 次のラブロック重力作用はそれぞれ宇宙定数（Λ）およびアインシュタイン・ヒルベルト重力作用（R）である．

17.3 共形変換とアインシュタイン理論

ここまで見てきたように，統一理論の立場からも第１次近似では一般相対性理論が正しいと予想されるが，量子補正などを考えると曲率高次項などが付け加わり，場合によっては高階微分も現れる．そのような理論は非常に複雑で具体的に解析するのは大変である．しかしこれらの理論のうちあるものは，そのまま扱うよりもっとうまい方法がある．以下ではそのいくつかについて紹介する．ここでは作用を次の形で表す．

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} F - \frac{\epsilon_\phi}{2}(\nabla\phi)^2 + S_{\rm matter}\ . \tag{17.9}$$

ここでスカラー場の運動項を正準形にとり，$\epsilon_\phi = \pm 1$ または 0 とする*4)．

17.3.1 $F(R,\phi)$ 理論[5)]

F がスカラー曲率 R とスカラー場 ϕ の任意関数 $F(R,\phi)$ で表される場合を考えよう．$F(R,\phi)$ が R の１次関数となる場合（スカラー・テンソル理論）とそうでない場合（$F(R,\phi)$ 理論）では扱いが異なる．

17.3.1.1 スカラー・テンソル理論

この場合

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[f(\phi) R - \frac{\epsilon_\phi}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \tag{17.10}$$

の作用で理論を記述する．$f(\phi), V(\phi)$ は ϕ の任意関数である．ここで計量の共形変換

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\omega} g_{\mu\nu} \tag{17.11}$$

を考える．$\omega = \frac{1}{D-2}\ln(2\kappa^2 |f(\phi)|)$ とし，新しいスカラー場 σ を

$$\kappa\sigma = \int d\phi \left[\frac{\epsilon_\phi (D-2) f(\phi) + 2(D-1)(f'(\phi))^2}{2(D-2) f^2(\phi)} \right]^{1/2} \tag{17.12}$$

で定義すると，作用は

$$S = \int d^D x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(\hat{g}) - \frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 - U(\sigma) \right] \tag{17.13}$$

となり，重力理論としては一般相対性理論と等価になる．ここで新しいポテンシャルは $U(\sigma) = \epsilon_f [2\kappa^2 |f(\phi)|]^{-D/(D-2)}$ で定義される（$\epsilon_f = \pm 1$ は f の符号）．

---

*4)　k インフレーションで考えるような運動項が非線形になる場合は考えない．

17.3.1.2 $F(R,\phi)$ 理論

任意関数 $F(R,\phi)$ が R の一次関数でない場合には，計量の高階微分が現れ，方程式は非常に複雑になる．ところがこの場合には

$$\kappa\sigma = \sqrt{\frac{D-1}{D-2}}\ln\left[2\kappa^2\left|\frac{\partial F}{\partial R}\right|\right]\ ,\ \ \omega = \frac{1}{D-2}\ln\left[2\kappa^2\left|\frac{\partial F}{\partial R}\right|\right] \tag{17.14}$$

と定義し，共形変換 (17.11) を行うと，等価な作用

$$S = \int d^D x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{1}{2\kappa^2}R(\hat{g}) - \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\sigma)^2 - \frac{\epsilon_\phi\epsilon_F}{2}e^{-\sqrt{\frac{D-2}{D-1}}\kappa\sigma}(\nabla\phi)^2 - U(\phi,\sigma)\right] \tag{17.15}$$

が得られる（$\epsilon_F = \pm 1$ は F の符号）．ここで，ポテンシャルは

$$U(\phi,\sigma) = \epsilon_F\left[2\kappa^2\left|\frac{\partial F}{\partial R}\right|\right]^{-D/(D-2)}\left(R\frac{\partial F}{\partial R} - F(R)\right) \tag{17.16}$$

で与えられる．$R = \mathcal{R}(\phi,\sigma)$ は (17.14) 式のはじめの式を R について解くことにより得られる．

ここで考えたようなスカラー曲率のみを含む場合には，高階微分で現れる自由度を新しいスカラー場 σ に吸収することにより，理論は一般相対性理論に新しいスカラー場を導入したものと等価になるのである．

17.3.2 $F(R_{\mu\nu})$ 理論[5)]

重力のラグランジアン F がリッチ曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ の任意関数 $F(R_{\mu\nu})$ で表される場合には，理論はもっと複雑になる．しかし次のような方法で，形式的には一般相対性理論と等価な理論に書き換えることができる．見かけの計量 $q^{\mu\nu}$ を

$$\sqrt{-q}q^{\mu\nu} = 2\kappa^2\sqrt{-g}\frac{\partial F}{\partial R_{\mu\nu}} \tag{17.17}$$

で定義する．(17.17) 式を $R_{\mu\nu}$ について解き，$R_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}, q^{\gamma\delta})$ のように表す．このとき等価な作用

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-q}\Big[&R(q,\partial q,\partial^2 q) + q^{\mu\nu}(C^\rho{}_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\mu\sigma}C^\sigma{}_{\rho\nu}) \\ &-q^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}(g,q) + \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-q}}F(\mathcal{R}_{\mu\nu}(g,q),g^{\alpha\beta})\Big] + S_{\mathrm{matter}}(g^{\alpha\beta},\psi) \end{aligned} \tag{17.18}$$

が得られる．ここで

$$C^\rho{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(g) - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\nabla^{(q)}_\mu g_{\nu\sigma} + \nabla^{(q)}_\nu g_{\mu\sigma} - \nabla^{(q)}_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{17.19}$$

である（$\nabla^{(q)}_\mu$ は $q_{\mu\nu}$ に関する共変微分）．

この作用は“計量” $q_{\mu\nu}$ に関してはアインシュタイン・ヒルベルト重力作用で表され，一般相対性理論と同じ重力理論を与える．元の計量 $g_{\mu\nu}$ はこの表式では 2 階テンソルで表される「物質場」として振る舞う．その運動項は $C^{\rho}{}_{\mu\nu}$ の 2 次式で与えられる．スカラー曲率は $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ であるので 17.3.1.2 節で考えた理論はいまの場合に含まれ，(17.17) が共形変換 (17.11) を与える．まったく一般的な共形作用としては他にワイルテンソル $C^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ を含むが，その場合，ワイルテンソルも「物質場」として扱うことができる．このように曲率の任意関数を含む理論も，適当な変換により形式的には一般相対性理論の形に表すことができる．但し，実際に解を求める場合にどれだけ簡単になるかは別問題である．

17.3.3 パラティニ形式

一般相対性理論を変分から導くには 2 とおりの方法がある．一つは，ヒルベルトがはじめに行ったように，計量を基本変数とし，その変分を取る方法である．もう一つの方法は，独立変数として計量と接続を採用する方法で，パラティニ形式と呼ばれる．そう呼ばれるが実はこの方法はパラティニ (A. Palatini) が考えた方法ではない[6]．パラティニが考えたのは，従来の方法と同じ計量を独立変数とする方法であった[7]．しかし彼はその変分を実行する際，途中で接続による変分も形式的に挿入した．彼は，接続を計量の汎関数と考え，計量の変分を計量そのものと接続で表されるものの 2 つに分けて行い，その後で接続の変分を計量の変分で置き換えたのである．丁度，合成関数の微分を行うときと同じ方法である．

ところがその途中の式は接続を独立変数として考えた場合とまったく同じであったので，1925 年にアインシュタインがこの方法を考えた[8]後もパラティニ形式と呼ばれるようになった．具体的に方法を示そう．作用を

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma) + S_{\mathrm{matter}} \tag{17.20}$$

と表す．ここで $R_{\mu\nu}(\Gamma) = \partial_\rho \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}$ である．$g^{\mu\nu}$ と $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ の変分から

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(\Gamma) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{17.21}$$

$$\nabla^{(\Gamma)}_{\alpha}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0 \tag{17.22}$$

が得られる．ここで $\nabla^{(\Gamma)}_{\alpha}$ は接続 Γ を用いた共変微分である．(17.22) 式は接続がレビ・チビタ接続（クリストッフェル記号）であることを表し，その結果 (17.21) 式は計量 $g_{\mu\nu}$ に対する通常のアインシュタイン方程式を与える．つまり，このパラティニ形式は通常の変分による方法と等価である．

ところが，この形式は曲率の高次の項を含む場合には異なる結果を与える[9]．例えば $F(R)$ 理論を考えよう．この作用を計量 $g^{\mu\nu}$，接続 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ が独立変数と

考え，$f(R)=2\kappa^2F(R)$ とおいて，変分を取ると

$$f'(R)R_{\mu\nu}(\Gamma)-\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu}=\kappa^2T_{\mu\nu} \tag{17.23}$$

$$\nabla_\alpha^{(\Gamma)}(\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu})=0 \tag{17.24}$$

となる．(17.24) 式の意味するところは，新しい計量 $h^{\mu\nu}$ を

$$\sqrt{-h}h^{\mu\nu}=\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu} \tag{17.25}$$

で定義すると，$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ が $h^{\mu\nu}$ のレビ・チビタ接続であるということである．(17.25) 式は $h_{\mu\nu}=f'(R)g_{\mu\nu}$ と同じであるので，前に議論した $F(R)$ 理論と同じであるように思うかもしれない．しかし (17.23) 式をちゃんと解析すると異なることがわかる．いま $P^\mu_\nu\equiv g^{\mu\rho}R_{\rho\nu}(h)$ を導入する*5)．また，$\hat{T}^\mu_\nu\equiv g^{\mu\rho}T_{\rho\nu}$ を定義すると，(17.23) 式は

$$f'(R)P_\mu{}^\nu-\frac{1}{2}f(R)\delta_\mu{}^\nu=\kappa^2\hat{T}_\mu{}^\nu \tag{17.26}$$

となる．この式のトレースを取ると，$f'(R)R-2f(R)=\kappa^2\hat{T}$ ($\hat{T}=\hat{T}^\mu_\mu$) が得られるが，それを R について解くと $R=\mathcal{R}(\hat{T})$ が得られる．この表式を $F(R)$ に代入すると，$P_\mu{}^\nu$ は

$$P_\mu{}^\nu=\frac{f(\mathcal{R})}{2f'(\mathcal{R})}\delta_\mu{}^\nu+\frac{\kappa^2}{f'(\mathcal{R})}\hat{T}_\mu{}^\nu \tag{17.27}$$

のように「物質場」によって決定される．そして $P_\mu{}^\nu$ の定義式を書き直すと，

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{f'(\mathcal{R})}h_{\mu\rho}P^\rho_\nu(\hat{T}_\alpha{}^\beta) \tag{17.28}$$

という重力方程式が得られる．これは計量 $h_{\mu\nu}$ に関するアインシュタイン方程式と等価である．しかし前に用いた共形変換の方法とは重力源の入り方が異なってくる．例えば，真空の場合（$T_{\mu\nu}=0$）を考えると，計量の変分を考えた場合，理論は［アインシュタイン重力 + スカラー場］と等価になる．ところが計量と接続を独立に変分すると，$\mathcal{R}=$ 一定となり，等価な理論は $R_{\mu\nu}(h)=\Lambda h_{\mu\nu}$ となる（$\Lambda\equiv f(\mathcal{R})/(2f'(\mathcal{R})^2)$）．つまり宇宙定数 Λ のみを含むアインシュタイン方程式になるのである．

17.4 アインシュタイン方程式の普遍性？

このように見ていくと，曲率高次項を含む複雑な理論やスカラー・テンソル理論などを考えても，適当な変換を施すことにより形式的にアインシュタイン方程式に帰着できる場合がかなりある．この事実は，アインシュタイン方程式

*5) ここで $R_{\mu\nu}$ は Γ と $\partial\Gamma$ の関数であるので，$h, \partial h, \partial^2 h$ の関数である．それを $R_{\rho\nu}(h)$ と表した．

の普遍性を意味するのか，それとも，単なる偶然なのか，そのあたりを考えることも重力理論を研究する上で興味深い課題となりうるであろう．

参考文献

1) C.G. Callan, E.J. Martinec, M.J. Perry and D. Friedan, *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 593.
2) N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, (Cambridge Univ. Press, 1982).
3) M.C. Bento and O. Bertolami, *Phys. Lett.* **B368** (1996) 198.
4) D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498.
5) A. Jakubiec, J. Kijowski, *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987) 719; G. Magnano, M. Ferraris, M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.* **19** (1987) 465; M. Ferraris, M. Francaviglia, G. Magnano, *Class. Quantum Grav.* **5** (1988) L95; K. Maeda, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 3159.
6) M. Ferraris and M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.* **14** (1982) 243.
7) A. Palatini, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **43** (1919) 203.
8) A. Einstein, *Sitzungber. Pruess. Akad. Wiss.* **414** (1925).
9) G. Allemandi, A. Borowiec, M. Francaviglia, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 103503.

第 18 章
高次元宇宙論と時空の次元

我々は 3 次元の宇宙に住んでいることは間違いない．それを前提とした一般相対性理論，およびビッグバン膨張宇宙論は大いなる成功を収めている．では，素粒子統一理論が予言する高次元時空からどのようにして我々の世界が誕生したのであろうか？ 我々の宇宙は何故 3 次元なのであろうか？ これに対する答えはまだわかっていない．しかし高次元時空を基礎に考える宇宙論では我々の住む 3 次元空間のみが大きくなると予想されている．

18.1 高次元宇宙論の試み 1 —カルツァ・クライン宇宙論—

アインシュタインは重力を幾何学的な対象とし，一般相対性理論を完成した．当時の基本的な相互作用は重力と電磁気力であるから，電磁気力も同じように理解できないかということは誰しもが考えることであろう．そしてその 2 つの力を幾何学的に統一しようという試みはカルツァとクラインによって考えられた[1)]．彼らの考えは，弱い相互作用や強い相互作用が発見された後も超対称性理論や超重力理論に受け継がれ，より高い次元で素粒子統一理論が考えられるようになった (第 16 章)．そして 11 次元の超重力理論は，究極の理論として期待された．

1980 年代は，この高次元統一理論を基礎に高次元宇宙論が注目された第一期である．この高次元時空が現実に存在すると考えると，現在の宇宙を説明するには 3 次元空間の部分が巨視的に大きく，それ以外の余剰次元空間は見えないほど小さくなっていないといけない．どうしてそのような時空が実現されるのかという疑問に関して，宇宙論的に興味深いアプローチがある[1)]．「動的次元縮小」(dynamical dimensional reduction) と呼ばれるもので，巨視的な空間の次元は宇宙の進化過程で 3 に減少したとする考え方である．言い換えると，全空間の 3 次元部分だけが宇宙論的に膨張し，巨視的になったとするのである．簡単のため 5 次元時空で考えよう．アインシュタイン方程式にはカスナー解と

いう真空解がある．3 次元空間部分と 5 次元目の宇宙のスケール因子をそれぞれ $a(t), b(t)$ とすると，世界間隔は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\boldsymbol{r}^2 + b^2(dx^5)^2 \tag{18.1}$$

となる．真空のアインシュタイン方程式の解は $a \propto t^{1/2}$,$b \propto t^{-1/2}$ で与えられる．これは我々の 3 次元空間が時間とともに膨張し，5 次元目の余剰次元空間が収縮していくことを示している．はじめすべての方向が同じ大きさであったとしても，宇宙の進化とともに 3 次元空間が大きくなり，残りの空間が小さくなっていくというわけだ．この 5 次元のモデルはあまりにも単純化されており，より現実的な超重力理論に基づいた宇宙モデルも研究された[1)]．

しかしこのとき問題となるのが，余剰次元空間の時間依存性である．上のカスナー解では 5 次元目の空間は限りなく収縮する．ところがその効果は，我々の宇宙では，ゲージ場の有効結合定数や有効重力定数の時間変化となって現れる．現実的には基本定数の時間変化には大きな制限が付いており（第 15 章），余剰次元空間は実質的には静的でなければならない．そこで，3 次元空間が膨張し，余剰次元空間が一定の大きさに落ち着くといった時空が現実に実現されるかどうかという研究も行われた．

余剰次元空間が一定のスケールに落ち着く安定な空間であるかどうかというのは，現在では「モジュライ問題」と呼ばれている．この時期に考えられたコンパクト化は d 次元余剰次元空間が平坦なトーラス（T^d）か正曲率を持つ球面（S^d），もしくはそれらを少し変形したものであった．その効果は 4 次元時空にはスカラー場（ϕ）の負（またはゼロ）のポテンシャルとして寄与する[*1)]．また，余剰次元空間は十分小さいと考えられ，その量子効果，特に空間がコンパクトであることから予想されるカシミアエネルギーが現れると予想される[1)]．これも 4 次元では ϕ のポテンシャルとして現れる．これらの効果だけではポテンシャルの極小値が負となり，4 次元時空には負の宇宙定数が現れる．そこで宇宙定数を勝手に付け加えたりして，観測と矛盾しないような宇宙論が議論された[1)]．

この動的次元縮小の際に 3 次元空間がインフレーション的に急激に膨張するという主張もなされた[1)]が，その後に特異点に発展し，現在の宇宙につながるモデルはない．また，超対称性を仮定するとカシミアエネルギーはゼロになるし，宇宙定数を勝手に加えるのも好ましくないであろう．実際，超重力理論を基礎にした場合，現在の宇宙を説明できるモデルは今のところ存在しない．

このように新しいインフレーション機構や超重力理論を基礎にしたより現実的なモデルなども考えられたが，宇宙論的にそれほど興味深い結果は得られなかった．

---

*1)　このスカラー場は余剰次元空間の大きさや形状を表すモジュライ場のことである．

18.2 ブレインと高次元の世界

11 次元超重力理論が究極理論として期待されてすぐ，それが現実の理論になり得ないことが明らかになった．カイラリティと呼ばれる左右の非対称性をもった現実的粒子を構成できなかったのである．そこで注目されたのが一つ次元の低い 10 次元超重力理論である．そして間もなく超紐理論が提唱されたが，その低エネルギー極限の有効理論が 10 次元超重力理論であった．この 10 次元理論には，11 次元超重力理論がもっていた理論の唯一性はなく，実際に 5 つの超紐理論が知られている．さらにはそれらの超紐理論を統一する 11 次元の理論（M 理論）の存在まで考えられている（図 16.2）．

ポルチンスキーによる D ブレイン解の発見[2]は，超紐理論を大きく進展させたが，我々の宇宙観も大きく変えた．ブレインは何を変えたのであろうか？ 開いた紐は力を表すゲージ場を構成している．その端がブレインに拘束されているので，力で結びつく粒子もブレインに拘束されていると予想できる．つまり高次元の中の薄い膜に物質（粒子）が閉じこめられていると考えられる．その結果，現在の高エネルギー実験と矛盾しないためにはこのブレインの厚さが 10^{-17}cm 以下であればよく，余剰次元の大きさそのものはそのような制限を受けない．ブレインが余剰次元空間内にあったとした場合，余剰次元を伝播できるのは閉じた紐である．閉じた紐は重力子を構成しているので，重力はブレインに拘束されず，余剰次元を伝播する．その結果，余剰次元空間の大きさを制限するのは重力実験だけで，これまでに行われている実験・観測から与えられる制限はせいぜい 0.1 mm 以上のスケールでしかない．比較的“巨視的な”スケールでもよいことになる（図 18.1 参照）．驚くべきことに，そのような大きさの余剰次元が存在しても我々の現在の実験のどれとも矛盾しないのである[3]．

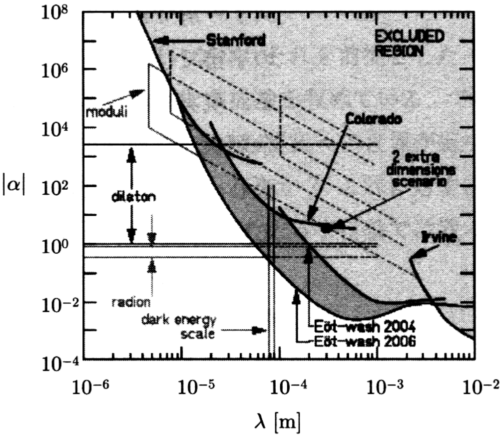


図 18.1　ニュートン重力（逆二乗則）からのずれの可能性を調べる実験（文献 3) の Fig. 6 より）．ニュートン重力からのずれを湯川型ポテンシャルとして表し $[V \propto 1/r \times (1 + \alpha e^{-r/\lambda})]$，そのパラメータ α（振幅），λ（力のおよぼすスケール）に対する実験的制限を示す．曲線より上側が実験により否定された領域．$\lambda > 5 \times 10^{-4}$ m に対しては $\alpha < 10^{-3}$ である．

このようなブレインが我々の宇宙であるとするブレイン宇宙モデルが最近注目されている．モデルには大きく分けて2つの種類がある．

(1) 大余剰次元モデル（ADD モデル）[4)]

時空はカルツァ・クライン的コンパクト化を考えるが，余剰次元空間の大きさ（ℓ_d）が素粒子スケールから見ると十分大きな場合を考える．その場合，高次元のプランク質量は

$$M_{d+4} = M_{\rm PL}^{2/(d+2)} \ell_d^{-d/(d+2)} \tag{18.2}$$

という関係になる．ℓ_d が十分大きいと，プランクスケール（$M_{\rm PL}$）が非常に大きくても，高次元のプランク質量 M_{d+4} は小さくできる．実際6次元時空（$d=2$）を考えると，$\ell_2 \sim 0.1\,\mathrm{mm}$ で $M_6 \sim 1\,\mathrm{TeV}$ になる．高次元時空のプランク質量が基本的なエネルギースケールを与えるので，重力も，他の相互作用同様，TeV スケールで統一されることになる．これは現在の加速器実験で到達可能で，量子重力が現実に検証可能になるということで，非常に注目を集めた．

(2) ランドール・サンドラムモデル（RS モデル）[5)]

カルツァ・クラインコンパクト化にしても，大余剰次元モデルにしても，余剰次元はコンパクト化しなければならない．しかしながら，ランドール（L. Randall）とサンドラム（R. Sundrum）は，1999年コンパクトでない余剰次元モデルを提案した．彼らのモデルは5次元バルク時空（AdS 時空）中にブレインを考えるといったシンプルなものである．

物質はブレインに拘束されているが，重力は5次元バルク時空を伝播できる．余剰次元がコンパクトでないと観測や実験と合わないように思われるが，モデルに導入された負の宇宙定数が重要な役割をするのである．ブレイン上の計量の質量ゼロモード（重力子）の満たすべき方程式には火山型ポテンシャルが現れ，低エネルギー重力子はその火口（ブレイン）に閉じこめられる．その結果，余剰次元空間がコンパクト化されていないにもかかわらず4次元重力はブレインに拘束され，ニュートン的な距離の逆二乗則が実現される．相対論的効果が重要になるような重力の強い状況でも，低エネルギー極限ではアインシュタイン重力が再現されることも示されている[7)]．

18.3 高次元宇宙論の試み2 —ブレイン宇宙論—

D ブレインの発見は，宇宙論にも大きな影響を与えた．高次元宇宙論の第二期の始まりである．もっとも，D ブレインの話が出る前にブレイン宇宙に似た提案はあった[6)]．我々の宇宙が高次元時空の中のソリトン的な3次元「膜」であるという考え方である．しかし，超紐理論によりその具体的な対象（ブレイン）の存在が指摘され，そのような世界をより現実的に考えるようになった．

大余剰次元モデルは，幾何学的にはカルツァ・クライン時空とほとんど同じ

であるので，もっぱらその観測・実験可能性やモデルの制限などの議論が行われた．一方，時空としての宇宙論を考える場合，前節に述べたランドール・サンドラムモデルは幾何学的に大きく異なり，また高エネルギー極限では一般相対性理論からのずれも期待できるので，それに基づく宇宙論が盛んに議論されることになった[7)].

このような新しい宇宙論を考える際に重要なことは2点ある．第1に「従来の理論で理解が困難な問題を解決する」，そして，第2に「新しい効果が現れ，宇宙論において重要な課題を解決する」の2点である．インフレーションがまさにこの2点を含んでいた．まず，観測的にも成功していたビッグバン宇宙論が抱える理論的困難（地平線問題，平坦性問題など）のいくつかを見事に解決した．さらに理論はインフレーション起源となるスカラー場の量子ゆらぎを予言した．銀河の種となる密度ゆらぎは宇宙背景輻射の温度ゆらぎとして発見されているが，このゆらぎは因果領域を規定する地平線スケールを超える非常に巨大なもので，そのようなゆらぎの存在を説明する理論は現在インフレーション理論ぐらいしかない．

ブレインを導入した宇宙論はそのような利点をもっているのであろうか？ ブレインには大きく分けて2つのモデルがあるといった．大余剰次元モデルは基本的にカルツァ・クライン宇宙論と変わらない．しかしランドール・サンドラムモデルでは一般相対性理論には含まれない項が現れ，従来の宇宙論とは異なる効果が期待できる．実際，一様・等方宇宙を仮定するとブレイン宇宙のフリードマン方程式

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\kappa_5^4}{36}\rho^2 + \frac{\mu}{a^4} \tag{18.3}$$

が得られる[7)]．κ_5^2 は5次元重力定数，μ は積分定数である．一般相対性理論との差は，密度 ρ の二乗に比例する項と，スケール因子 a の逆4乗に比例する項が現れることである．後者は輻射の密度と同じ振る舞いをするので，暗黒輻射と名付けられた．このブレイン宇宙の基礎方程式ははじめ5次元時空を厳密に解くことにより得られた[7)]．そしてそれが実は5次元反ドジッター・シュヴァルツシルト解（5次元ブラックホール時空）の中を運動する3次元超曲面の方程式と等価であることが後に明らかにされた．その結果から，暗黒輻射に含まれる積分定数 μ が，実は5次元ブラックホールの質量に対応していることがわかった．

この2つの新しい項はどのような影響を与えるであろうか？ 暗黒輻射は輻射と基本的に同じであるので，もし存在してもビッグバン宇宙の元素合成などから制限を受けるであろう．一方，密度の二乗項は高密度になる宇宙初期のシナリオを大きく変える．実際，輻射優勢宇宙でその項が優勢となる場合，スケール因子は $a \propto t^{1/4}$ のように変化する．宇宙初期のシナリオも大きく変わるであろう．インフレーションモデルも少なからず変更を受ける．しかしながらこれ

らの新しい項は，インフレーションのように宇宙論にとって好ましい効果をもたらすことはあまりない．観測などからモデルに制限が付けられるだけである．

そのような状況で，ブレインの特色を使った2つのアプローチがある．どちらもいまもっとも盛んに研究されているテーマなので紹介しておく．

一つはブレインインフレーションと呼ばれるもので，モジュライ問題の解決と同時にインフラトン場の起源を素粒子統一理論に探るという試みである[8]．10次元時空を6次元カラビ・ヤウ空間にコンパクト化し，フラックスでこの余剰次元を固定する[9]．その中に3次元ブレイン（我々の世界）をおく．そのままでは我々の世界には負の宇宙定数が出てきてしまうので，反ブレインを平行におき，エネルギーを正に持ち上げる．またこのとき，反ブレイン・ブレイン間の相互作用で有効ポテンシャルが現れる．そこで我々の3次元時空がインフレーションを起こす．ブレインは反ブレインに近づいていき，インフレーションは終了する．今の場合，2つのブレイン間の距離がインフラトン場になっている．カルツァ・クライン宇宙論のとき同様，余剰次元における大きさや間隔が4次元ではスカラー場のように振る舞うのである．

もう一つはインフレーションにかわる新しい初期宇宙モデルで，エキピロティック宇宙論（または周期宇宙論）と呼ばれる[*2][10]．これは高次元時空中で2つの平行なブレインが衝突し，そのときに発生するエネルギーがビッグバンを引き起こすというシナリオである．このモデルは生成される密度ゆらぎなどに問題を抱えているが，従来とはまったく異なる初期宇宙モデルを提供することで注目されている．

18.4 何故3次元か？

カルツァ・クライン宇宙論にしても，ブレイン宇宙論にしても，空間の進化により現在の大きな3次元世界を説明するという点は非常に興味深い．しかしそれらの進化を考える際，はじめに3次元空間とそれ以外の余剰次元空間を区別する必要があった．この非等方な膨張により「3次元空間が大きく，他の次元が小さく留まる」ことは説明できるが，「何故その3次元空間だけが特別なのか？」という疑問には答えていない．つまり，我々の宇宙が何故3次元なのかということは説明できていないのである．その疑問に答えるのは非常に難しいと思われるが，紐やブレインの性質を用いたいくつかの試みがある．

すべての空間が丸く閉じているトーラス（T^9）を考えよう．このとき，閉紐はこのトーラスのある方向をぐるっと一周することができる．もし閉紐が巻き付いていると，その空間の方向は膨張しようとしても紐が切れない限り大きく

---

*2)　この名の由来は，ギリシアのストア哲学におけるエクピローシス（ekpyrosis）である．エクピローシスは，火による世界の破滅と再生の概念で，世界は一定の時を経た後，全体が炎に包まれ，燃え尽きた後，新しい世界の創生が再び始まるとする考えである．

時間は 1 次元

時間が 1 次元というのは因果律の観点から理解できる．時間の次元数が 1 であると，光円錐は「未来」と「過去」が時空点の「現在」（図の原点）で切り離され，光円錐内部を移動し元の地点に戻ってきたとき必ず未来になっている．もし時間が 2 次元以上存在すると，「未来」と「過去」が「現在」で分離されず，「現在」から「光円錐」内部の「未来」や「過去」を通って再び「現在」に戻ってこられる（図 18.2 参照）．そのようなことが起こると因果律が破れるので，少なくとも古典物理学としては時間の次元は 1 でなければならない．

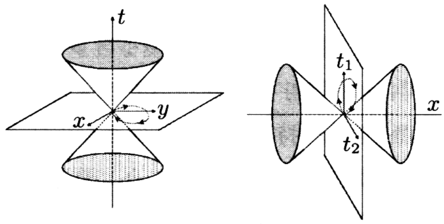


図 18.2 時間の次元数．時間の次元数が 1 であると（左図），未来と過去が切り離され，因果律は破れない．時間の次元数が 2 以上だと（右図），「光円錐」内部を動いていても，現在から「未来」にいって，再び「現在」に戻ってくるループが可能になり，因果律を破る．

なれない．しかし紐が交差すると紐のつなぎ換えにより，巻き付きが切れる．そうするとその空間は大きくなれることになる．いま紐の軌跡は 2 次元超曲面（world sheet）をつくるので，2 つの紐が実質的に交差できるのは $2+2=4$ 次元時空である．より大きな次元ではほとんど交差しない．その結果 4 次元時空が抽出されるというわけである[11]．

もう一つのアイデアでは，いろいろな次元のブレイン（および反ブレイン）をコンパクト化されていない 9 次元空間にたくさん入れておき，その対消滅過程を考える[12]．このとき，9 次元空間はフリードマン宇宙のように一様・等方的に膨張しているとする．どの次元のブレインが最終的に残るかを決定するには 2 つの競合過程がある．一つはブレイン・反ブレインの対消滅で，ブレインの次元があまり大きいと必ず重なる部分が現れ，対消滅すると予想される．次元を下げて考えると，3 次元空間内の 3 次元空間は完全に重なる，2 次元面は平行な場合を除き重なる，1 次元の直線や 0 次元の点はほとんど重ならないといった具合である．これを 9 次元空間に拡張して考えると 3 次元以下のブレインが実質的に重ならない（$4+4<10$）．つまり，そのような次元をもったブレインは対消滅を免れ，現在まで残るというわけだ．もう一つの過程は，宇宙膨張によるブレインエネルギー密度の減少である．これは，ブレインの次元が低いほど早く薄まる．その結果，1 次元でも 2 次元でもなく，3 次元ブレインが大きな確率で残されるという訳だ[*3]．

*3) より詳細な解析によると，3 次元ブレインと 7 次元ブレインが実質的に残ることが示される[12]．

これらの試みはまだまだアイデアの段階といえる．しかしながら，これまで次元数を物理学で理解するということなど考えもしなかっただけに，これらの試みは非常に興味深い．近い将来，「我々の宇宙が何故3次元か」を科学で説明できる時代が来るかもしれない．

参考文献

1) カルツァ・クライン理論および宇宙論の代表的論文は T. Appelquist, A. Chodos, and P.G.O. Freund 編 *Modern Kaluza-Klein Theories* (Addison-Wesley, 1987) にまとめられている．
2) J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724.
3) D.J. Kapner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 021101.
4) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulis, and G.R. Dvali, *Phys. Lett.* **B436** (1998) 257.
5) L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690.
6) V.A. Rubakov and M.E. Shaposhinikov, *Phys. Lett.* **B125** (1983) 139; K. Akama, in *Gauge Theory and Gravitation* ed. by K. Kikkawa, N. Nakanishi, and H. Nariai (Springer-Verlag, 1983) [hep-th/0001113].
7) ブレイン宇宙論に関しては K. Maeda and M. Sasaki 編 *Brane World: New Perspective in Cosmology*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148** (2002) を参照.
8) S. Kachru *et al.*, *JCAP* **0310** (2003) 013.
9) S. Kachru *et al.*, *Phys. Rev.* **D68** (2003) 046005.
10) J. Khoury *et al.*, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 123522.
11) R. Brandenberger and C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B316** (1989) 391.
12) A. Karch and L. Randall, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 161601.

第 19 章
超マクロ世界の重力

ミクロスケールでは重力の量子化という未完成問題とも関係して，アインシュタインの一般相対性理論は何らかの形で修正されなければならないのは明らかだ．一方，太陽系など巨視的なスケールでは一般相対性理論は非常によい精度で正しいことがわかっている．しかし，もっと大きなスケールでもまた一般相対性理論を超える重力理論が必要となるかもしれない．宇宙論最大の謎「ダークエネルギー」がその鍵である．

19.1 ダークエネルギー

1998 年，2 つの観測グループが衝撃的な観測事実を発表した[1,2]．宇宙が加速的に膨張しているというのである．重力は「万有引力」であるので，すべての物体同士はお互いに引き合う．ビッグバンで膨張を始めた宇宙は，宇宙の物質同士の引力によりその膨張速度を次第に減らしていく．丁度，放り投げた物体が，地球の引力に引かれるためその上昇速度を落としていくようにである．宇宙がずっと膨張し続けるか，どこかで U ターンして収縮に転ずるかに関係なく，宇宙の膨張は減速していくはずであった．しかし，現実の宇宙は現在加速されながら膨張しているというのである．

19.1.1 ダークエネルギーの存在

どうして宇宙が加速していることがわかるのであろうか？ ビッグバン宇宙論の成功により，我々は宇宙がアインシュタインの一般相対性理論で正しく表されていることを知っている（第 6 章）．その宇宙の膨張はフリードマン方程式

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{19.1}$$

で記述される．ここで a は宇宙の大きさを表すスケールファクターで，$H = \dot{a}/a$ は宇宙膨張率を表すハッブル膨張率である．また $k = 0, \pm 1$ は宇宙の曲率の符

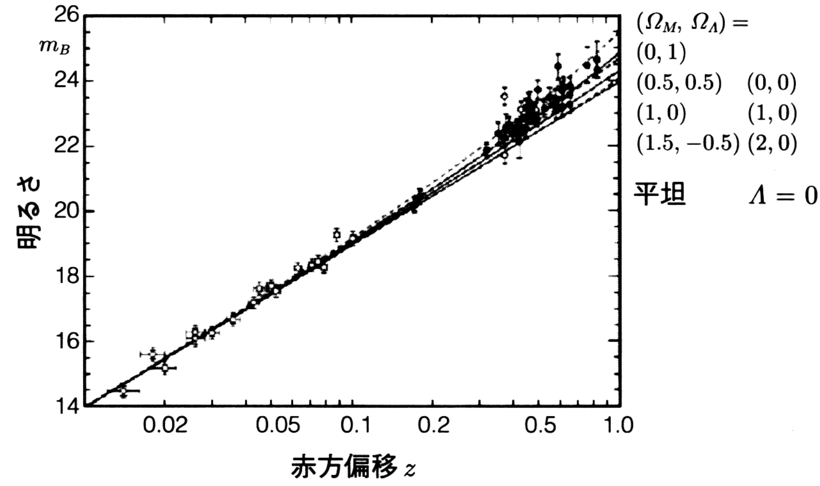


図 19.1 Ia 型超新星を用いた赤方偏移–明るさの関係（文献 2) の Fig. 1 より）．いくつかの宇宙モデル（平坦で $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,1), (0.5, 0.5), (1,0), (1.5, -0.5)$ としたもの，および $\Lambda = 0$ で $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,0), (1,0), (2,0)$ としたもの）が曲線で示されている．$\Lambda = 0$ のモデルは観測値と一致しない．平坦だとすると $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ が観測値と合う．

号を，Λ はアインシュタインが導入した宇宙定数を，ρ は宇宙の物質密度を表している．宇宙モデルを決める密度パラメータを

$$\Omega_M = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \ \Omega_k = \frac{k}{a^2H^2} \tag{19.2}$$

と定義するとこの式は

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda - \Omega_k = 1 \tag{19.3}$$

となる．

ハッブル膨張率は，宇宙の密度や宇宙定数によって時間的に変化する．これが観測的に決定できれば，宇宙の膨張率が時間と共にどう変化しているかがわかる．しかし，ハッブル定数（現在の膨張率）すら決定するのに非常に紆余曲折があり，その決定は非常に難しい（第 6 章）．これを決めるには，宇宙にある標準光源までの距離と後退速度を正確に決定しなければならない．距離の推定には天体の絶対光度が，後退速度の決定には赤方偏移がわかればよい．赤方偏移は測定ではっきりするが，絶対光度は個々の天体によって異なるため，その推定が難しい．特に今の場合，宇宙論的な距離にある天体に対し精度よく決定しなければならない．そこで採用されたのが Ia 型の超新星である．これは白色矮星のまわりを回るコンパニオン星からの物質降着によって起こる超新星であることがわかっており，その光度曲線と絶対光度の関係がよく知られている天体である．明るいので宇宙論的距離といった非常に遠くまで観測可能で，宇宙膨張の変化を調べるのに適している．図 19.1 がその結果で，観測された超新星

のデータと宇宙モデルを与えたときの理論曲線が数本描かれている．これによると宇宙定数をゼロとした宇宙モデルは他のパラメータをどのようにとっても，観測値と合わない．一方，平坦な宇宙モデル（$\Omega_k = 0$）では $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ が観測値をよく説明する*1)．

2つの独立なグループによる観測結果であったが，研究者達はこの結論に半信半疑であった．そうこうするうちに，宇宙背景輻射の温度ゆらぎのより正確な観測を目的とした観測衛星 WMAP（Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）が打ち上げられ，驚くべき精度で宇宙のモデルが決定された[4]．宇宙モデルを仮定し，観測された温度の非等方性と一致するようにパラメータを決めるのであるが，その結果は表 19.1 のようであった．

表 19.1 WMAP による宇宙背景輻射から決定された宇宙パラメータ[4]．宇宙年齢は1年目のデータ解析結果．$h = H_0/(100[\mathrm{km/s/Mpc}])$ は規格化されたハッブル定数．Ω_M, Ω_B, $\Omega_0(= \Omega_\Lambda + \Omega_M)$ はそれぞれ宇宙の物質，バリオン，および宇宙の全エネルギーの密度パラメータである．ΛCDM モデルは，宇宙定数 Λ と冷たいダークマター（CDM）が存在する曲率ゼロの宇宙モデル，SNLS (SuperNova Legacy Survey)，HST (Hubble Space Telescope) は他の観測実験のデータ．

宇宙パラメータ	解析結果	使ったデータと宇宙モデル
宇宙年齢	137 億年（±1%）	WMAP（ΛCDM モデル）
ハッブル定数 h	$0.73\ ^{+0.03}_{-0.03}$	WMAP（ΛCDM モデル）
$\Omega_M h^2$	$0.127\ ^{+0.007}_{-0.013}$	WMAP（ΛCDM モデル）
$\Omega_B h^2$	$0.0223\ ^{+0.0007}_{-0.0009}$	WMAP（ΛCDM モデル）
Ω_0	$1.015\ ^{+0.020}_{-0.016}$	WMAP+SNLS
	$1.010\ ^{+0.016}_{-0.009}$	WMAP+HST

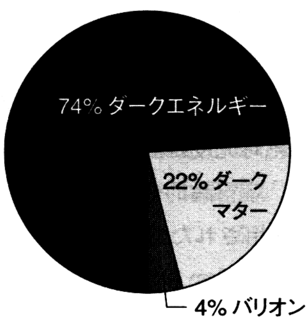


図 19.2　宇宙の構成物質の割合．

これによると宇宙年齢は 137 (±1) 億年，曲率はほぼゼロの平坦な宇宙で*2)，宇宙を構成する物質のほとんどがダークマター (22%) とダークエネルギー (74%) ということになる．我々自身を構成する普通の物質 (バリオン物質) はほんの数% しか存在しない（図 19.2）．

*1)　この観測以前にも宇宙定数 Λ の存在を示唆する観測はあった[3]．
*2)　$\Omega_0 = 1$ の場合，$\Omega_k = 0$ となり，平坦な宇宙モデルになる．

19.1.2 ダークエネルギーは奇妙な物質？

宇宙が加速膨張しているかどうかを見るにはアインシュタイン方程式のもう一つの式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \tag{19.4}$$

をみればよい．ここで P は宇宙の物質を流体近似したときの圧力である．$\ddot{a}$ は「加速度」を表しているが，宇宙項がなく，普通の物質（$\rho > 0, P \geq 0$）を考える限り加速度が負，つまり宇宙膨張は減速していることになる．

しかし宇宙が現実には加速膨張しているということは宇宙定数が正であるか，$\rho + 3P < 0$ を満たす奇妙な物質を考えなければならない．そこで，そのような物質を普通の物質と区別し，宇宙定数 Λ を含めてダークエネルギーとし ρ_{DM} と表す．ダークマターを含む普通の物質のエネルギーを ρ_M とすると全エネルギーは $\rho = \rho_{DM} + \rho_M$ と表される．

ダークエネルギーとしては，これまでの観測から宇宙定数と考えることもできる．実際，ダークエネルギーの状態方程式を $P_{DM} = w\rho_{DM}$ としたとき，観測からの制限は，宇宙が平坦だと仮定すると $w = -1.02^{+0.13}_{-0.19}$ [5] または $w = -0.967^{+0.073}_{-0.072}$ [4]，仮定しない場合でも，いくつかの観測を合わせて $w = -1.08^{+0.12}_{-0.12}$ [4] であるので，宇宙定数（$w = -1$）は矛盾しない[*3]．

では何故素直に宇宙定数とせず，ダークエネルギーなるものを考えるのであろうか？ それはその大きさに関係する．通常，場を量子化すると真空のエネルギーが現れる．これは，電磁場の場合には，2 枚の金属板間に働く力の測定からカシミアエネルギーとして実験的に確認されている[6]．そのエネルギー・スケールは，考えている場の典型的な値になると予想される．ところが観測を説明するのに必要な宇宙定数の値は理論から予想される値より何桁も小さくなければならない．例えば，プランクスケールの真空のエネルギーは現在存在すると考えられる宇宙定数（真空のエネルギー）の 120 桁も大きい．超対称性を考えると，フェルミ粒子とボーズ粒子の真空のエネルギーに対する寄与が逆で打ち消し合うため，真空のエネルギーはゼロになる．しかし現在の宇宙ではもちろん超対称性は破れており，破れのスケールに対応した真空のエネルギーが存在することになる．その値を考えても観測値より 60 桁大きいのである．これは「宇宙項問題」とも呼ばれており，素粒子物理学の永年の課題である．

ダークエネルギーの問題はこの宇宙項問題よりも深刻である．それは，この宇宙定数の値が，単に非常に小さいというだけでなく，「何故現在の宇宙密度に極めて近いのか」という謎が加わるからである．宇宙定数は文字通り「定数」である．通常の物質は体積が倍になると，密度は半分になる．宇宙の膨張とともにその密度は減少する．現在，物質密度が 30%弱で「宇宙定数」が 70%強とい

---

*3) 宇宙定数は真空のエネルギーと等価（$\rho_{\mathrm{vac}} = \Lambda/8\pi G$）で，状態方程式は $P_{\mathrm{vac}} = -\rho_{\mathrm{vac}}$ である．

うことは，宇宙が現在の十分の一の大きさのときは，物質密度が 99.77%を占め，宇宙定数はわずか 0.23%であった．逆に宇宙が現在の十倍になるときには，物質密度は臨界密度の 0.43%しかなく，宇宙定数が 99.57%を占める．つまり，宇宙のエネルギーにおいて物質密度と宇宙定数がほぼ同じ程度（3 : 7）寄与するのは宇宙進化の中のほんの限られた時期なのである．その限られた短い期間に，たまたま我々人類が生きているというのはあまりにも偶然すぎないかという疑問である．「宇宙の偶然性問題」と呼ばれる．

この疑問を解決するために，ダークエネルギーは宇宙定数ではなく，ある基本場のエネルギーとする考えが提唱された．つまり，宇宙定数に似るが時間的に変化しうるエネルギーを考えるのである．その多くはスカラー場を考える．はじめに提案されたのがクィンテッセンス場である[7)*4)]．スカラー場 ϕ のポテンシャルとして特別のもの（例えば $V = \mu^{q+4}/\phi^q$）を考えると，非常に一般的な初期条件からはじめても，宇宙の進化において輻射優勢・物質優勢の時期が存在し，やがてこの場のエネルギーが優勢になり，宇宙は加速膨張を始める．現在に近くなってから加速膨張を始めるためにはポテンシャルのエネルギースケール μ を精緻に選んでおく必要がある．例えば，q=3 に対しては $\mu \sim 6.25 \times 10^{-18} M_{PL}$ でなければならない．

その後，クィンテッセンス場は $w = -1$ 近くの値を予言するのが難しいこともあって，もっと奇妙な物質も考えられるようになった．クィンテッセンス場は，物質の状態方程式（$P_{DM} = w\rho_{DM}$）でみると $w = (\dot{\phi}^2 - 2V)/(\dot{\phi}^2 + 2V)$ であるので $-1 < w < -1/3$ に対応している．スカラー場の運動項の符号を変えると $w < -1$ といった「物質」（ゴースト場）も考えることができる．このような「物質」をダークエネルギーとして考えるときはファントム場と呼ぶ．また，宇宙の進化の中でクインテッセンス優勢からファントム優勢となるクィントム場なるものや非常に奇妙な状態方程式（$P_{DM} \propto -\rho_{DM}^{-1}$）を与えるチャプリギン（Chaplygin）ガスまで議論されている．

我々がまだ全くその正体を知らないこのような奇妙な物質が本当に宇宙を満たしているのであろうか？ 物質としてそのような変なものを導入したくなければ，別の考え方をすればよい．

19.1.3 ダークエネルギーは重力の新しい効果？

宇宙の加速膨張が「奇妙な物質」のせいだと考えなければならなかったのは，一般相対性理論を基礎にしたフリードマン方程式 (19.1) が正しいと信じたからである．しかし一般相対性理論が本当に正しいとわかっているのは太陽系近傍

---

*4) 古代ギリシャの哲学者アリストテレスは，地上の世界と天上の世界を明確にわけ，地上の物質は「火・水・気（風）・土（地）」の 4 つの元素からなるとし，天上の世界は，第 5 元素と呼ばれるものからなっていると考えた．この第 5 元素であるクィンテッセンス（quintessence [quinta essentia]）をもじって名付けられた．

の実験と連星パルサーの観測だけである．それらより遙かに大きいスケールの宇宙を考えるときに一般相対性理論が正しいかどうかまだわからない．

もっともビッグバン宇宙論が成功していることから，とんでもない重力理論を考えることはできないであろうが，一般相対性理論とは違った重力理論を考えることで，ダークエネルギー問題が解決されるかもしれない．アインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{19.5}$$

と表される．観測で宇宙の加速膨張が見つかったというのは時空の時間変化の様子であるから，左辺の曲率部分がわかることになる．そうすると，右辺の物質として奇妙な物質「ダークエネルギー」を考えないといけなくなる．一方，もし「奇妙な物質」を考えたくなければ，左辺の曲率項を変更すればよい．

しかし重力理論を一般化するには無限の可能性がある．何らかの指針が必要であろう．現在は，いろいろな角度からその可能性が考えられている．これまでも，ダークエネルギー問題とは別の観点から一般相対性理論を拡張する可能性について述べてきた．

ブランス・ディッケ理論に代表されるスカラー・テンソル重力理論，超紐理論の有効作用に現れる曲率の高次項などの補正項，ブレイン宇宙における有効重力理論などなどである．その中でもブレイン宇宙モデルの一つであるDGPモデルが注目されているが[8]，理論自体に欠陥（ゴースト）があるため，ダークエネルギーを説明するのは難しそうである．そのほかの重力理論でも十分納得のいくモデルは提唱されていない．

19.1.4　ダークマターも修正重力理論で？

ここまでダークエネルギーのみについて話をしてきたが，ダークマターについても少しだけ述べておこう．ダークマターは，銀河や銀河団のまわりに局在し，その状態方程式も奇妙なものではないと考えられる．何らかの未知の粒子という可能性が高い．超対称性粒子（ニュートラリーノ）やアキシオンなどがその有力候補に挙がっている．そのような標準的な考えとはちょっと異なる興味深いアプローチとして，ニュートン重力を修正することでダークマターを説明しようという試みがある．ミルグロム（M. Milgrom）によって提案されたMOND（Modified Newtonian Dynamics）である[9]．これは加速度が非常に小さいところでニュートンの運動方程式が変更を受けると考える．具体的には，運動方程式を

$$\mu(|\boldsymbol{a}|/a_0)\,\boldsymbol{a} = -\nabla\phi_N \tag{19.6}$$

とする．ここで，ϕ_N は重力ポテンシャルである．$\mu(|\boldsymbol{a}|/a_0)$ は加速度 $\boldsymbol{a}$ の関数で，$|\boldsymbol{a}| \gg a_0$ のとき $\mu \approx 1$ とし，通常のニュートン力学が成立するようにす

るが，$|\boldsymbol{a}| \ll a_0$ のときには $\mu \approx |\boldsymbol{a}|/a_0$ と仮定し，運動方程式を大きく変更する．$a_0 \sim 10^{-8}\,\mathrm{cm/sec}$ ととると，ダークマター存在の観測的証拠の一つである渦巻き銀河の回転則などがうまく説明できる．もっとも，この理論は，運動方程式を現象論的に修正したもので，基礎重力理論とは考えにくい．そのような状況で，ベケンシュタイン（J. Bekenstein）は，ニュートン極限がMONDとなるスカラー・ベクトル・テンソル理論（TeVeS 重力理論）を提唱している．これらのアプローチが，本当にダークマターなしで“ダークマターの観測的証拠”を説明しうる理論になるかどうかはわからないが，修正重力理論が「未知の物質」を説明するかもしれないという意味で興味深い試みといえる．しかしながら，銀河衝突の観測などから光るバリオン物質とは異なる場所に光っていない重力源（ダークマター）が存在するという，ダークマターの直接的証拠も見つかってきており[11)]，そのようなアプローチの形勢はよくない．

19.2　太陽系近傍の謎と重力理論

太陽系近傍の重力は，ニュートン重力理論やそれをより精密にした一般相対性理論で十分に正しく表されるといった．しかしながらそのよくわかっているはずの太陽系においても未だに解決されていない謎が存在する．「パイオニア異常」と呼ばれる現象である[12)]．それは，1972 年 3 月 2 日，および 1973 年 12 月 4 日に打ち上げられた人工衛星パイオニア 10 号と 11 号の軌道に関する謎である．2 つの衛星はドップラー追跡法を使って正確にその位置および速度が測定されている．それらは木星および土星に接近後，双曲線軌道で太陽系を脱出しつつある．パイオニア 10 号は，2005 年 1 月 1 日現在，太陽から 87.06 天文単位離れたところを，速度 12.24 km/sec で航行している．

これらの衛星が 20〜70 天文単位の距離にあった時の軌道を相対論的効果も入れ詳細に解析した結果，非常にわずかではあるが，ドップラー偏移が青い方へ一様に時間変化しているのが見つかった．$\dot{f}_P \sim (5.99 \pm 0.01) \times 10^{-9}\,\mathrm{Hz/sec}$ の割合で変化しているのである．これを衛星に加わっている余剰加速度と見なすと，その値は

$$a_P = (8.74 \pm 1.33) \times 10^{-8}\,\mathrm{cm/sec}^2 \tag{19.7}$$

となる（図 19.3）．この一定加速度がほぼ太陽の方向に向かって余分に加わっているというのである．太陽や惑星の重力はもちろん，衛星に働くと思われるすべての力を考慮してもこの余剰加速度は説明できないのである．

この値は，太陽から 2,600 天文単位離れた位置にあるときの太陽による重力加速度と同じ程度であるので，極めて小さい．そんなに小さな値なので，太陽からの輻射や太陽系内のダスト，さらにはダークマターの影響や，また人工衛星自身による機械的誤差など，様々な原因が考えられる．それらをすべて誤差

評価し，どうしても説明できない量として残った値が上の数字である．現在のところこの加速度異常の原因は全くわかっていない．従来の物理学をもとにまだ検討し忘れている効果が原因とする考えと，新しい物理学がその背後に隠れているとする考えとの両面から解析が続けられている．この問題をさらに興味深くしている事実として，この加速度異常が，ハッブル定数と光速度からつくられる加速度 $a_H = cH_0 \sim 10^{-7}\,\mathrm{cm/s^2}$ に極めて近いということである．このことから，原因を宇宙論的起源に求める研究者もいるが，もっともらしい説明は今のところない．

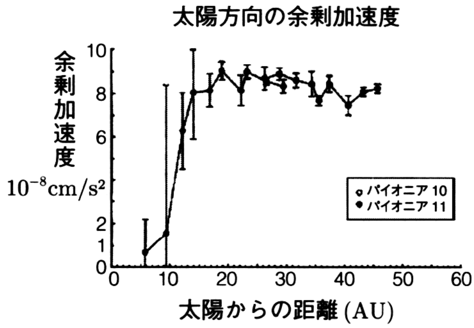


図 19.3　パイオニア 10 号，11 号の加速度異常[12)]．（J.D. Anderson *et al.*, *Phys. Rev.* **D65** (2002) 082004, Fig. 7 より．）考えられる効果をすべて考慮した後も，太陽方向に一定の余剰加速度が存在する．

また，最近，地球・太陽間の平均距離「天文単位」がだんだん大きくなっているという話もある．地球と他の惑星間の距離の精密測定により，天文単位が永年的に 100 年間で $(15 \pm 4)\,\mathrm{m}$ の割合で増えているというのである[13)]．この話の信憑性についてはまだこれから十分検討する必要があるが，よく知っていると思っている太陽系においても未知の（重力？）現象がまだ存在するのは興味深い．

参考文献

1) A.G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009; B.P. Schmidt *et al.*, *Astrophys. J.* **507** (1998) 46.
2) S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
3) M. Fukugita, F. Takahara, K. Yamashita, and Y. Yoshii, *Astrophys. J. Lett.* **361** (1990) L1.
4) D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175; **170** (2007) 377.
5) A.G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **607** (2004) 665.
6) M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rept.* **353** (2001) 1.
7) B. Ratra and P.J.E. Peebles, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3406; T. Chiba, N. Sugiyama, and T. Nakamura, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **289** (1997) L5; R.R. Caldwell, R. Dave, and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1582; P.J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 123504.
8) G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, *Phys. Lett.* **B485** (2000) 208.
9) M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270** (1983) 365, 371, 384.
10) J. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 083509; *Erratum-ibid.* **D71** (2005) 069901.
11) D. Clowe *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **648** (2006) L109.
12) J.D. Anderson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2858; *Phys. Rev.* **D65** (2002) 082004.
13) G.A. Krasinsky and V.A. Brumberg, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **90** (2004) 267.

第 20 章
結 — アインシュタインを超えて

20.1 物理学を進化させる重力

これまで見てきたように，重力というものは非常に不思議な力である．そしてその身近な存在にも関わらず，人類はまだ完全にその正体を掴んでいない．しかし，はじめに言ったように，謎を考え，解こうとすることによって，科学は進歩する．もちろん，数十万年前に地球上に誕生したばかりの人類が 150 億年の宇宙の神秘を完全に解明できるとは思えないが，着実に進歩するのである．謎の解明は自然のより正しい認識や理解をもたらすと共に新しい謎を生み出す．そしてまたその謎の解明に取り組む．そのプロセスを繰り返すことによって科学は進歩していくのである．

ニュートンは，リンゴの落下するのを見て月も地球に向かって落下していることに気がついたかどうかわからないが，とにかく，地球上の物体の落下現象と天体の運動を統一する万有引力を発見した．それは重力現象をことごとく説明していった．ただ水星の近日点移動の謎が残された．数世紀後に，アインシュタインは，まったく新しい重力理論を提案した．時空の幾何学として重力というものを捉えることで，これまでの人類の「時間」や「空間」に対する認識を大きく変えてしまった．そしてそれは人類の宇宙に関する理解を飛躍的に広げていった．このように，重力の謎はことあるごとに物理学を進化させてきたといえる．

そしていま，力の統一や量子論においても重力は他のものとは異なった振る舞いを見せ，宇宙論スケールでもいろいろと謎を提供している．その謎の解決がまた，人類に科学の新しい進化をもたらすことであろう．現代の「重力」に関する「謎」は，不思議なことに両極端のスケールで現れている．超ミクロなスケールでは量子重力理論や超紐理論などいろいろなアプローチで研究されているにもかかわらず未だに基礎理論が何か解明できていない．一方，「重力」の問題であるかどうかは不明であるが，宇宙論的超マクロなスケールではダーク

エネルギーという宇宙論最大の「謎」が存在する.

20.2 超ミクロ重力の謎：時空は量子化すべきか？

一般相対性理論は，重力を幾何学の対象として扱い，時空のゆがみによって重力場を記述している．その対応は非常によい精度で実験や観測と合っている．またそのような統一的理解は物理学と幾何学とを融合させるものとして非常に美しい理論になっている．その一方で，重力場のそのようなとらえ方は他の物質場と重力場の間に大きな差異を生み出している．一般相対性理論においては局所的なエネルギーの定義が困難であるし，重力場はゲージ場とは微妙に異なるので大統一理論による力の統一の枠からはみ出している．重力場がくりこみ不可能というのもそのような違いが関係しているように思われる．重力と時空の同一視により重力場の量子化は時空の量子化と等価となり，問題をより難しくしている．つまり，時空の量子化は時間と空間の離散化を意味するため，その取り扱いは極めて難しくなるのである．

しかし，どのようなスケールで重力の量子化が必要になるのであろうか？いま理論に含まれる自然定数は，光速 c，プランク定数 $\hbar$，そしてニュートン重力定数 G である．それらからつくられる長さのスケール（プランク長）$(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.616 \times 10^{-33}\,\mathrm{cm}$ 程度までいくと重力場の量子化，つまり時空の量子化が必要だとされている*1)．このスケールは通常の物質（電子や電磁場など）の量子効果が重要となるスケールに比べると何十桁も小さい．

そこで，1970 年代には，難しい重力場の量子化を行わないで，古典的時空中で，非重力的な場の量子化についての研究が，パーカー（L. Parker）[1]によって始められた*2)．この重力を古典的に扱い，物質場を量子化する方法は半古典重力理論と呼ばれる．彼は主に膨張宇宙における粒子生成の問題を考えたが，その半古典的アプローチの最大の成功は，ホーキングによるブラックホール蒸発の予言である[3]（第 14 章）．

重力を量子化するということは時空を量子化するということであるので，時間や空間は連続的な多様体ではなくなる．つまり通常のリーマン幾何学では表せないのだ．まったく新しい概念が必要になるであろう．第 16 章で議論してきた量子重力理論や超紐理論はそのような問題に正面から取り組むものとして今後の発展が期待される．さらに時空量子化の方法の一つとして非可換幾何学という面白い考え方がある．通常のリーマン幾何学では，まず多様体を定義しその上で関数を考える．これははじめに空間があり，そこでいろいろな物理量が関数として定義されているということである．この考えは現代物理学の考え方

---

*1) プランク時間，プランク質量，プランク密度はそれぞれ，$(\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.391 \times 10^{-44}$ 秒，$(\hbar c/G)^{1/2} = 2.177 \times 10^{-5}\,\mathrm{g}$，$c^5/\hbar G^2 = 5.157 \times 10^{93}\,\mathrm{g/cm^3}$ である．

*2) シュレディンガー（E. Schrödinger）[2]が実はその先駆けであった．

の基本である．ところが非可換幾何学ではまず関数の集合（関数族）が存在する．その代数的な関係が非可換群で表現される．これまでのアプローチでは可換な関数族を考えることになる．この関数族を表現するために「空間」を設定し，その幾何学的な性質を考えるのが非可換幾何学である．空間はあくまで関数族（物理現象）を記述するための一つの手段なのである．この「空間」を巨視的に見ると可換な関数族で表される空間に近づき，これまでのリーマン幾何学が再現される．この考えが正しいとすると，アインシュタインの曲がった時空はマクロな重力現象を記述するための都合のよい「表現」ということになる．ミクロなスケールでは，時間や空間に対する考えがまたさらに大きな変更をうけることになる．このような時空の新しい見方はまだ始まったばかりで，物理学の次の大きな一歩に発展するかもしれない．

また一方で，全く異なる考えもある．プランクスケールは，通常の物質の量子論的スケール（例えば電子のコンプトン波長は $\hbar/(m_e c) \approx 3.862 \times 10^{-11}\,\mathrm{cm}$）に比べて 20 桁以上も小さい．そのようなスケールまで一般相対性理論は本当に正しいのであろうか？ 重力と時空の対応関係はプランクスケール以上ならいつも成り立つのであろうか？ 人類がこれまで考えてきた法則にはすべて限界がある．一般相対性理論もプランク長では量子重力効果が効くようになるので，変更を受けるといわれているが，本当にそのようなスケールまで何十桁にわたって成り立つ法則なのであろうか？ 一般相対性理論があまりに美しいので，その点に疑問を持つ研究者はあまり多くないように思われる．しかし，「プランクスケールより十分大きいがまだミクロなスケールで，まったく異なる重力の基礎理論が存在し，アインシュタイン方程式は単にその基礎理論の巨視的なスケールでの有効理論ではないか．曲がった時空による重力の記述（一般相対性理論）は巨視的なスケールでのみ正しいのではないか」と考える研究者たちもいる．そのような考え方の中で面白いアイデアを紹介しよう[4]．まず，原子・分子の法則と流体力学の関係を考えてみよう．ミクロな世界の原子・分子はシュレディンガー方程式で記述される．それらが非常にたくさん集まった巨視的物質は連続体として振る舞う．流体としての近似がよい場合にはその運動はナビエ・ストークス方程式で記述される．シュレディンガー方程式もナビエ・ストークス方程式も共にそれぞれの領域で現象を非常によく記述している．しかし，ナビエ・ストークス方程式をいくら詳しく解析しても原子・分子の世界は見えてこない．ナビエ・ストークス方程式を量子化しても，ミクロな世界の法則は出てこない．せいぜい流体の振動モードの量子化からフォノンが現れるぐらいだろう．それはナビエ・ストークス方程式が多粒子系において成り立つ有効理論であるからだ．

これと同じことが重力にも当てはまるかもしれないというのである．ここでは，アインシュタイン方程式は「ナビエ・ストークス方程式」にあたり，ミクロの世界では我々がまだよく知らないもっと基礎的な重力理論が存在すると考え

る．ミクロスケールでは重力は必ずしも時空とは関係しない．しかしその基礎理論を元に巨視的なスケールでの重力現象を考えるとリーマン幾何学で重力を記述する一般相対性理論がその有効理論として導かれるのではという予想である．曲がった時空が重力を表すのはプランク長よりもっともっと大きなスケールからであって，それより小さなスケールでは時空よる重力現象の記述はもはや正しくないと考えるのである．アインシュタイン方程式はあくまで巨視的な「ナビエ・ストークス方程式」であり，ミクロな世界の「原子・分子の法則」を記述していない．そうだとすると，アインシュタイン方程式を量子化すること，また時空を量子化することもまったく意味がなくなる．量子化を実行しても「フォノン」が得られるのみで，本当に知りたい「原子・分子の量子状態」についてはわからないというわけだ．

もちろん，そのような考え方は極端で，正しいとすると，重力場の量子化をどう探って行けばいいのかわからなくなる．フー（B.L. Hu）は，トップダウン的アプローチの超紐理論に対抗し，ボトムアップ的手法としての「確率論的重力理論」を提案している[5)]．重力場の量子化をせずに，物質場の量子化に伴うゆらぎが古典的重力場の揺動としてどのように現れるかを研究することで，重力の量子論的側面の一端を垣間見ることができるのではと言っている．しかし，話はそんなに簡単ではないだろう．

20.3 超マクロ重力の謎：現代の「エーテル」と「水星の近日点移動」?

一方，第 19 章で述べた超マクロスケールにおける「ダークエネルギー」や「パイオニア異常」の謎の存在は，相対性理論誕生以前の状況に似ている．光（電磁波）は波であるが，「波は媒質中を伝播する」という常識があったため，光を伝えるための媒質「エーテル」の存在が当然のこととして考えられた．そのエーテルを見つけようといろいろな実験が行われたが，結局エーテルの存在は確かめられなかった．この結論は当時の常識からするととても不思議なものであった．その問題を解決したのが，アインシュタインの特殊相対性理論で，光速度不変の原理を前提とすることで，実験結果を見事に説明した．エーテルは存在しなかったのである．その特殊相対性理論は「絶対時間の否定」という科学史上最も重要な事実の一つを明らかにすることになった．いま観測されているダークエネルギーは，これまで我々が正しいと信じてきた法則や考え方が間違っていなければ存在することになる．しかしながら，そんな奇妙な物質が宇宙を満たしているとはとても信じがたいというわけだ．まさに現代の「エーテル」ではないか．

一方，一般相対性理論以前には「水星の近日点移動」の問題があった．ニュートン重力理論ではどうしても説明できない近日点移動の残差が存在した．しか

し，これは必ずしもニュートン重力の問題とは言い切れなかった．結果的には重力理論の変更につながったが，太陽が扁平していれば説明可能であったし，他にも原因を探すことができた．そういう意味で，パイオニア異常は現代の「近日点移動」といえるかもしれない．いろいろな原因が考えられるが，満足のいく説明はまだない．しかしそれが新しい物理学に導くかもしれない．

このように巨視的なスケールにおける宇宙の謎も新しい重力理論，さらには新しい科学を拓く鍵となるかもしれない．今後の宇宙観測と重力理論の進展に注目したい．

参考文献

1) L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 562; *Phys. Rev.* **183** (1969) 1057.
2) E. Schrödinger, *Physica* **6** (1939) 899.
3) S.W. Hawking, *Nature* **248** (1974) 30; *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
4) B.L. Hu, *Int. J. Theor. Phys.* **44** (2005) 1785.
5) B.L. Hu and E. Verdaguer, *Living Rev. Relativity* **7** (2004) 3.

索　引

欧数字

ア

カ

サ

タ

ナ

ハ

マ

人名

著者略歴

前田　恵一
まえだ　けいいち

1950 年　大阪市生まれ
1974 年　京都大学理学部物理学科卒業
1979 年　京都大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程修了
1979 年　京都大学基礎物理学研究所 学振特別研究員
1980 年　京都大学より理学博士号を取得 理学博士
1983 年　イタリア・トリエステ SISSA 研究員
1985 年　イタリア・トリエステ ICTP 研究員
1986 年　パリ・ムードン天文台 客員研究員
1987 年　東京大学理学部助手
1989 年　早稲田大学理工学部物理学科教授
現在　早稲田大学理工学術院大学院先進理工学研究科
物理学及応用物理学専攻教授

専門　理論宇宙物理学・宇宙論・重力理論

主要著書・監修・訳書
「宇宙のトポロジー」(岩波書店，1991 年)
「カオスとの遭遇」(産業図書，1995 年)(共訳)
「アインシュタインの時間」(ニュートンプレス，1998 年)
「図解雑学 ビッグバン」(ナツメ社，1999 年)(監修)
「アインシュタインとボーア」(裳華房，1999 年)(共編・共著)
「図解雑学 ブラックホール」(ナツメ社，2001 年)(監修)
「The Scalar-Tensor Theory of Gravitation」(Cambridge University Press, 2003)(共著)
「複雑系叢書 5 複雑さと法則」(共立出版，2006 年)(編集・共著)

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 63
『重力理論講義　相対性理論と時空物理学の進展』
著　者　前田 恵一
2008 年 5 月 25 日　初版発行
発行人　木　下　敏　孝

数　理　科　学　編　集　部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817
ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

編集スタッフ
平　勢　耕　介　伊　崎　修　通
大　溝　良　平

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-57：for Senior & Graduate Courses）

3次元トポロジーの新展開

リッチフローとポアンカレ予想

戸田　正人　著

本体 1867 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

"宇宙の形" のモデル，3 次元多様体の基本的な性質に関する主張である「幾何化予想」，及びそれに含まれる「ポアンカレ予想」の肯定的解決を導く一連の議論を解説．リッチフローと呼ばれる方程式の解析を通して解決の道筋を切り開いた数学者ペレルマン（2006 年フィールズ賞受賞辞退）の卓抜なアイデアを知ることができる．

サイエンス社